TMV130, Envariabelanalys V & AT, läsåret 2013/14
Vecko–PM läsvecka 6

Adams: 4.9–4.10, 9.1–9.4

De avslutande två veckorna på kursen skall handla om Taylorutveckling, talföljder och serier. Sedan lång tid tillbaka känner du till och har räknat med de elementära funktionerna $\sin x, \ln x, \sqrt{x}$ osv. och säkert har du någon gång ställt dig frågan hur man egentligen gör för att beräkna t.ex. $\sin 1, \ln 2, \sqrt{3}$, eller värdet av någon annan elementär funktion, endast genom att addera/subtrahera och multiplicera/dividera decimaltal med varandra. Eftersom de sökta talen i allmänhet är irrationella så kan vi bara hoppas på att hitta närmevärden. Det finns många sätt att angripa detta problem och många lösningar, i regel beroende på vilken typ av funktion som är inblandad. Ett sätt är att använda s.k. Taylorutveckling (avs. 4.10), vilket i princip innebär att man approximerar en funktion $f(x)$ med polynom i närheten av någon given punkt $x = a$. Det linjära polynomet $P_1(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$ har samma funktionsvärde och samma derivata i punkten $x = a$ som funktionen $f(x)$ och ger därför en ganska god approximation av $f(x)$, åtminstone för x som ligger nära a. Sådana linjära approximationer skall vi studera i avsnitt 4.9. Vi kan förbättra approximationen genom att bestämma ett polynom av högre grad med överenstämmande derivator av högre ordning dvs. ett polynom av grad n som är sådant att $P_n(a) = f(a), P_n'(a) = f'(a), P_n''(a) = f''(a), ..., P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$. När man gör approximationer så är det i regel också viktigt att ha kontroll på felet. Den s.k. Taylors formel ger oss inte bara ett sätt på vilket vi enkelt kan bestämma Taylorpolynomen $P_n(x)$ utan ger oss också information om felet;

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Taylorutveckling har många användningsområden, utöver att beräkna närmevärden till funktionsvärden, bl.a. skall vi se hur det kan användas för att beräkna gränsvärden.

Kapitel 9 handlar om talföljder och serier. Formellt sätt är en serie en summa med oändligt många termer. Det är inte självklart hur man skall göra om man vill tilldela ett värde på en serie men, i analogi med hur vi definierade generaliserade integraler, så är det naturligt att betrakta en serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ som ett gränsvärde $\lim_{n\to\infty} s_n$ av partialsummorna $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Om gränsvärdet existerar säger vi att serien är konvergent och i annat fall divergent. Vissa serier kan beräknas exakt som t.ex. geometriska serier $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$, då $|r| < 1$, men ofta får man nöja sig med uppskattningar. Värdet på en serie kan ju alltid approximeras med en partialsumma men först bör man i så fall kontrollera att serien överhuvud taget är konvergent. Vi skall därför studera ett antal kriterier för att avgöra om en given serie är konvergent resp. divergent.

Rekommenderade uppgifter

Talen i tabellen refererar till övningsuppgifter i sjunde upplagan av
Calculus, a complete course, av Adams och Essex.

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
4.9	1, 3	15, 18	
4.10	1, 5	7, 10, 11, 17, 19, 21, 25, 27	30
9.1	1, 3, 7, 8, 15, 17, 18, 28	20, 23, 36	30, 31
9.2	1	5, 7, 9	17, 21
9.3			1, 3, 7, 19, 21, 25
9.4			1, 3, 7, 17, 27

Veckans kryssuppgifter: 4.9.15, 4.10.19, 9.1.31, 9.3.25

Lärmål

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Adams	Mål
4.9	veta vad som menas med *linjäriseringen* av en funktion i en punkt (Def.8, sid 267) och kunna använda linjärisering för approximativ beräkning av funktionsvärden.
4.10	veta vad som menas med *Taylorpolynomet* av grad/ordning n till en funktion i en punkt, samt kunna bestämma Taylorpolynom till en given funktion i en given punkt och kunna använda det för approximativ beräkning av funktionsvärden.
4.10	redogöra för Taylors formel, med felterm på Lagrange form (Sats 12, sid 275) och på integralform (Sats 22, sid 544), samt känna till vad som menas med att *Taylorutveckla* en funktion i en punkt.
4.10	betydelsen av *stora-ordo-notationen* och dess egenskaper (Def.9 och egenskaperna därefter), samt kunna använda beteckningen vid beräkning av gränsvärden (t.ex. Ex.9 & 10, sid 280)
4.10	veta vad som menas med *Maclaurinpolynom* och *Maclaurinutveckling* av en funktion.
4.10	använda Sats 13 (sid 278) för bestämning av Taylorpolynom (se t.ex. Ex.6,7,8 i avs. 4.10).
9.1	veta vad som menas med en *talföljd* och känna till olika sätt att beskriva talföljder (t.ex. med mängdklamrar som i Ex.1.a-g sid 497 eller rekursivt som i Ex.1.h-i sid 497)
9.1	veta vad som menas med att en talföljd är; *uppåt/neråt begränsad*, *begränsad*, *positiv/negativ*, *växande/avtagande, monoton*, *alternerande* (se Def.1, sid 497), samt i enklare fall kunna avgöra om en talföljd uppfyller kriterierna för dessa begrepp.
9.1	veta vad som menas med *gränsvärde av en talföljd* och hur de betecknas (Def.2, sid 499).
9.1	veta vad som menas med en *konvergent* resp. *divergent* talföljd, samt i enklare fall kunna avgöra om en talföljd är konvergent/divergent (se tex. Ex.5-6, sid 499-500).
9.1	känna till och använda gränsvärdesreglerna för talföljder (se markerad ruta på sid 500) för att beräkna gränsvärden (se tex. Ex.6, sid 500).
9.2	veta vad som menas med en *serie* och vad som menas med en *partialsumma* för en serie.
9.2	veta vad som menas med en *konvergent* resp. *divergent serie* (se bl.a. Def.3, sid 505).
9.2	veta vad som menas med en *geometrisk serie* och kunna avgöra om en sådan är konvergent, samt i förekommande fall beräkna sådana (se tex. Ex.1 & 2 sid 506-507).
9.2	använda konvergenskriterierna i Sats 4-6 (sid 508-509) för att avgöra om en serie är konvergent eller divergent, samt kunna använda räknereglerna i Sats 7 (sid 509) för att beräkna eller uppskatta serier.
9.4	veta vad som menas med en *absolutkonvergent* serie (Def.5, sid 521) och kunna använda Sats 13 (sid 521) för att visa att en serie är konvergent. Du skall också veta vad som menas med en *betingat konvergent* serie (Def.6 sid 522) och kunna ge exempel på en sådan serie.

För överbetyg skall du också kunna:

Adams	Mål
4.10	bevisa Taylors formel (Sats 12)
4.10	uppskatta felet då funktionsvärde eller integral beräknas approximativt med hjälp av Taylorpolynom (se t.ex. Ex.4 & 5, sid 276-277, resp. Ex.4 sid 382).
4.10	bevisa Sats 13 (sid 278).
9.1	avgöra om en talföljd är uppåt/neråt begränsad, begränsad, positiv/negativ, växande/avtagande, monoton och/eller alternerande i mer komplicerade fall än vad som krävs på godkäntnivå.
9.1	beräkna gränsvärdet av en talföljd eller avgöra om en talföljd är konvergent/divergent i mer komplicerade fall än vad som krävs på godkäntnivå (se tex. Ex.7-9, sid 501-502)
9.3	använda integraluppskattningar för att avgöra om en serie är konvergent eller divergent (sid 511). Speciellt skall du känna till och kunna bevisa för vilka p som serien $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ är konvergent resp. divergent (se Ex.1, sid 512).
9.3-9.4	använda jämförelsekriterierna i Sats 9 (sid 514) samt Sats 13 (sid 521) och Sats 14 (sid 522) för att avgöra om en serie är konvergent eller divergent (se tex. Ex.3 sid 514 och Ex.3 sid 524)