TMV130, Envariabelanalys V & AT, läsåret 2013/14
Vecko–PM läsvecka 7

Adams: 9.5-9.8

Innan vi rundar av kursen med repetition, kompletteringar och tillbakablickar på kursinnehållet så skall vi göra ett kort nedslag i teorin om potensserier och speciellt skall vi studera Taylorserier. En *potensserie* är en serie på formen;

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

och skall betraktas som en funktion av x. Vissa potensserier konvergerar endast då $x = c$ (då alla termer är 0) och vissa potensserier är absolutkonvergenta för alla x. I annat fall kan man visa att en potensserie konvergerar absolut i något intervall $(c - R, c + R)$ kring $x = c$ och divergerar då $|x - c| > R$. *Konvergensradien* R kan ibland bestämmas med det s.k. *kvotkriteriet* som ger att;

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

Konvergensen i ändpunkterna på *konvergensintervallet* dvs. då $x = c - R$ respektive $x = c + R$ måste undersökas separat t.ex. med de konvergenskriterier vi studerade förra veckan. En potensserie som konvergerar på något öppet intervall I kan deriveras och integreras termvis på I;

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_k(x-c)^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-c)^{k-1}$$

$$\int_c^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-c)^k\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_c^x a_k(t-c)^k\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-c)^{k+1}$$

Om $f(x)$ är en funktion som har derivator av alla ordningar i en punkt $x = c$ (dvs. om $f^{(k)}(c)$ existerar för alla positiva heltal k) så kan vi bilda *Taylorserien* av f kring $x = c$;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

Notera att partialsummorna till en sådan serie är Taylorpolynomen för f kring $x = c$. I många fall kommer Taylorserien konvergera mot $f(x)$ i en omgivning av $x = c$ dvs. resttermen i Taylorutvecklingen av f kommer gå mot 0. I så fall sägs funktionen vara *analytisk*. I vissa sammanhang kan det vara användbart att ersätta en sådan funktion med dess Taylorserie. I allmänhet kan det dock vara svårt att bestämma Taylorserien för en funktion genom att derivera och hitta ett mönster i uttrycken för derivatorna. Istället skall vi, på ett liknande sätt som i avsnitt 4.10, härleda nya Taylorserier utifrån ett antal redan kända *Maclaurinserier* (se formelbladet) dvs. Taylorserier kring $x = 0$.

Rekommenderade uppgifter

Talen i tabellen refererar till övningsuppgifter i sjunde upplagan av *Calculus, a complete course*, av Adams och Essex.

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
9.5			1, 3, 5, 7, 12-18
9.6		1, 5, 15, 16	18, 26
9.7		23, 24, 25	
9.8		1, 4	

Lärmål

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Adams	**Mål**
9.5	veta vad som menas med en *potensserie* (Def.7, sid 527) och känna till hur konvergensområdet för en potensserie kan se ut (Sats 17, sid 528). Du skall också känna till begreppen *konvergenscentrum*, *konvergensintervall* och *konvergensradie* för en potensserie och speciellt skall du kunna bestämma dessa för serier av typen $\sum_{n=1}^{\infty} a^n(x-c)^n$.
9.6	veta vad som menas med *Taylorserie* resp. *Maclaurinserie* för en funktion.
9.6, 9.8	använda entydighetssatsen för potensserieutvecklingar (sats 21, sid 537) och kända Maclaurinserier (se formelblad) för att bestämma Taylorserier till andra mer sammansatta funktioner (se tex. Ex.3-5 sid 541-542).
9.7, 4.10	använda Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärden (se tex. Ex.3 sid 548–549 och Ex.9 & Ex.10, sid 280).

För överbetyg skall du också kunna:

Adams	**Mål**
9.5	använda kvotkriteriet (markerad ruta på sid 529) för att bestämma konvergensradien till en potensserie.
9.5	derivera eller integrera kända potensserieutvecklingar termvis för att erhålla nya/andra potensserieutvecklingar (se tex. Ex.4-7, sid 533-535).