Tentamen

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

131218 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anders Martinsson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

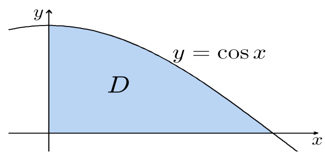
Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.



2. Låt D vara det område i första kvadranten som begränsas av koordinataxlarna och kurvan $y = \cos x$ (se figur).

(a) Beräkna volymen av den kropp som bildas då området D roterar kring x-axeln. (3p)

(b) Beräkna volymen av den kropp som bildas då området D roterar kring y-axeln. (3p)

3. En enkel modell för avsvalning är att anta att temperaturen i en kropp förändras med en hastighet som är proportionell mot temperaturskillnaden mellan kroppen själv och omgivningen. dvs.

$$T'(t) = k(T(t) - T_{omg})$$

Där $T(t)$ är temperaturen (mätt i $°C$) efter t sekunder, T_{omg} är omgivande temperatur och k är någon proportionalitetskonstant.

(a) Lös differentialekvationen med lösningsmetod för linjära differentialekvationer av första ordningen (redovisa alla steg och ange lösningen på explicit form). (3p)

(b) Lös differentialekvationen med lösningsmetoden för separabla differentialekvationer (redovisa alla steg och ange lösningen på explicit form). (3p)

4. (a) Bestäm Taylorpolynomet $P_2(x)$ av grad 2, kring $x = 9$, för funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. (3p)

(b) Använd Taylorpolynomet i (a) för att beräkna $\sqrt{10}$ approximativt. Uppskatta även felet i din approximation genom att studera resttermen $E_2(x)$. (3p)

VÄND!

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. En regndroppe faller från ett moln. Droppen antas hela tiden vara sfärisk. På väg ned mot marken avdunstar droppen så att dess volym minskar med en hastighet som i varje ögonblick är proportionell mot ytan av regndroppen. Vid en viss tidpunkt har regndroppen volymen $1\,mm^3$, och en minut senare är volymen $\frac{1}{8}\,mm^3$. Hur lång tid ytterligare tar det för droppen att helt avdunsta bort, så att inget av droppen återstår, förutsatt att den inte hinner träffa marken. (6p)

Tips: Du behöver känna till ett samband mellan volymen av ett klot och arean av dess sfäriska begränsningsyta. Om du inte minns ett sådant samband så kan du t.ex. beräkna volymen och arean med metoder från kursen, genom att betrakta klotet som en rotationskropp och sfären som en rotationsyta.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar. (rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion för $x \geq 0$ så är

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent om och endast om $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent. (2p)

(b) $y = x^2$ är en ortogonalkurva till kurvskaran $x^2 + 2y^2 = C$
(dvs. parabeln skär alla sådana ellipser med rät vinkel). (2p)

(c) Om $P_2(x) = 2 - x + x^2$ är Taylorpolynomet av grad 2, kring $x = 1$, till en funktion $f(x)$ så är $f(x)$ avtagande i en omgivning av punkten $x = 1$. (2p)

7. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (6p)

Lycka till!
Thomas W

Anonym kod	TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 131218	sid nr. 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm tangentlinjen till den plana kurvan $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$ i punkten $(3, 2)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna översumman $U(f, P_3)$ till integralen $\int_0^1 f(x)\,dx$, där $f(x) = 1 + x - x^2$ och P_3 betecknar indelningen av intervallet $[0, 1]$ i tre lika stora delintervall. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm integralen $\int \frac{x}{(1 + x^2)(1 - x^2)}\,dx$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Avgör om serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 + 2^k}{3^{k+2}}$ är konvergent och bestäm i så fall dess värde. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Visa att $y(t) = te^{2t}$ är en lösning till differentialekvationen $y'' - y' - 2y = 3e^{2t}$ och bestäm alla andra lösningar. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\ldots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad |x| \leq 1$$