Tentamen

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

140425 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: John Bondestam Malmberg, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Beräkna arean av den rotationsyta som bildas då kurvan $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, roterar kring y-axeln. (6p)

3. Antag att ett föremål med massa m släpps vid tiden $t = 0$ från 10 meters höjd och därefter faller fritt mot marken endast påverkad av tyngdkraften och luftmotståndet. Om man antar att kraften som luftmotståndet ger upphov till är proportionell mot föremålets fart (vilket är rimligt vid låga hastigheter) så ger Newtons andra kraftlag att;

$$mv'(t) = mg - kv(t)$$

där $v(t)$ är föremålets fart efter t sekunder, g är tyngdaccelerationen och k är en proportionalitetskonstant. Hur lång sträcka har föremålet fallit efter t sekunder. (6p)

4. (a) Visa att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-7)^k}{3^{2k}}$ är konvergent och beräkna dess värde. (4p)

(b) Ge exempel på en konvergent talföljd $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ sådan att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent. (2p)

(Motivera ditt svar!)

VÄND!

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. En kedjekurva är den form en böjlig kedja eller kabel får av tyngdkraften då den hänger fritt mellan två fixa punkter. Man kan visa att en sådan kurva $y = y(x)$ uppfyller en differentialekvation av följande typ;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

för någon positiv konstant k. Bestäm kedjekurvans form då $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ och $k = 1$. (6p)

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar. (rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) Integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + x^2}$ är konvergent. (2p)

(b) Följande två parametriseringar beskriver samma kurva

$$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos 2t \end{cases}, \; 0 \leq t \leq \pi \qquad \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t\sqrt{2 - t^2} \end{cases}, \; -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$ (2p)

(c) Partialsummorna till serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + k^2}$ bildar en avtagande talföljd. (2p)

7. Analysens huvudsats knyter samman derivation och integration genom formeln;

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Bevisa detta under lämpliga förutsättningar på $f(x), a$ och x.
Redogör tydligt för var förutsättningarna kommer in i beviset. (6p)

Lycka till!
Thomas W

Anonym kod	TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 140425	sid nr. 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Förklara vad som menas med en *Riemannsumma* för en funktion på ett intervall. (2p)

Beskrivning:

. . . .

(b) Bestäm en primitiv funktion till $\dfrac{x}{1-x^2}$. (3p)

Lösning:

Svar: . . . .

(c) Lös differentialekvationen $e^{y+x}y' = x$ (3p)

Lösning:

Svar: . . . .

(d) Bestäm lösningen på randvärdesproblemet $\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1\ ,\ y(1) = 0 \end{cases}$ (3p)

Lösning:

Svar: . . . .

(e) Bestäm Taylorpolynomet $p_3(x)$ av grad 3, kring $x = 1$, för funktionen $f(x) = x \ln x$. (3p)

Lösning:

Svar: . . . .

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \le 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \le 1$$