Tentamen

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

150114 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anna Persson, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. (14p)
Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt D vara det område i xy-planet som ligger mellan funktionskurvan $y(x) = \sqrt{2x\sqrt{1-x^2}}$, $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, och x-axeln.
Beräkna volymen av den kropp K som bildas då området D roteras kring x-axeln. (6p)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' - y = \cos x + \sin x \\ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \end{cases}$. (6p)

4. (a) Bestäm Taylorserien för funktionen $f(x) = e^{x+3}$ kring $x = 3$. (3p)

(b) Använd resultatet i (a) för att beräkna $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{e^6 - e^{x+3}}{3 - x}$ (3p)

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. En platta begränsas av de fyra kurvorna $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ och $y(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \in [0, 1] \\ x, & x \in [1, 2] \end{cases}$.

Plattan har densitet $\sigma(x) = e^{\frac{x}{2}}$ kg per a.e. Beräkna plattans massa och masscentrum. (2+4p)

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar.
(rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) Serien $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{-n^2}$ är konvergent. (2p)

(b) Potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ konvergerar för $x \in (-3, 3)$ men ej för några andra värden på x. (2p)

(c) Den generaliserade integralen $\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x + 133}$ är konvergent. (2p)

7. (a) Definiera vad det innebär att en begränsad funktion på ett slutet intervall är Riemannintegrerbar och definiera Riemannintegralen för sådana funktioner. (4p)

(b) Ge ett exempel på en sådan funktion som inte är Riemannintegrerbar. (2p)

Lycka till!
Oskar H

Anonym kod	**TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 150114**	sid nr. **1**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' = \frac{x^3+3x^2+1}{y} \\ y(0) = 8 \end{cases}$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+2^k)$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Finn en primitiv funktion till $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna undersumman $L(f, P_4)$ till integralen $\int_0^1 f(x)dx$ där $f(x) = x^2$ och P_4 betecknar partitionen av $[0, 1]$ i fyra lika stora delintervall. (3p)

Lösning:

Svar: ....

EN UPPGIFT TILL PÅ BAKSIDAN!

(e) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 kring $x = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ för funktionen $f(x) = \sin x^2$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \leq 1$$