Tentamen

TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1

150817 kl. 8.30–12.30

Examinator: Thomas Wernstål, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Gustav Kettil , telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: bifogat formelblad, ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa

För godkänt på tentamen krävs minst 23 poäng då bonuspoäng ej är inräknad, samt minst 25 poäng med bonuspoängen inräknad, på tentamens Godkäntdel. För godkänt på kursen krävs också att du är godkänd på de två datorövningarna med tillhörande obligatoriska uppgifter. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens båda delar (Godkäntdelen och Överbetygsdelen) och inklusive bonuspoäng.

Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.

Tentan rättas och bedöms anonymt. Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar. (14p)

Till följande uppgifter skall fullständig lösning redovisas på separat skrivpapper. Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Låt D vara det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = 5 - x^2$ och $y = 4/x^2$. Skissa området D och beräkna dess area. (4p)

(b) Ställ upp en integral som ger volymen av den kropp som bildas då området D roterar kring x-axeln. OBS! Integralen behöver inte beräknas. (2p)

3. Det var jul hemma hos familjen Jansson när värmesystemet i deras hus plötsligen slutade fungera. Temperaturen utomhus var vid händelsen $-10°C$ medan det inne i huset var $20°C$ varmt. En timme efter händelsen hade temperaturen i huset sjunkit till $16°C$. När temperaturen inomhus till slut nådde $10°C$ valde familjen att lämna huset. Hur lång tid hade det då gått från det att värmesystemet gick sönder?

Antag att temperatursänkningen per tidsenhet är proportionell mot skillnaden mellan inner- och yttertemperatur (Newtons avsvalningslag). Om $y(t)$ är temperaturen i huset t timmar efter att värmesystemet gått sönder så är i så fall

$$y' = k(y - (-10))$$

för någon proportionalitetskonstant k. (6p)

4. (a) Bestäm konvergensintervallet för potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}(x-2)^n$. (3p)

(b) Förklara vad som menas med en absolutkonvergent serie och ge exempel på en sådan serie. (3p)

VÄND!

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen.

5. Beräkna $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}\right)$ (6p)

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera dina svar. (rätt svar utan motivering ger inga poäng)

(a) $\int_{-1}^{1}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(\cos x)}\,dx = 0$ (2p)

(b) Om $y(t)$ är en lösning till en linjär och homogen differentialekvation med konstanta koefficienter och C är en konstant så är även $C \cdot y(t)$ en lösning till samma ekvation. (2p)

(c) Varje konvergent talföljd är begränsad. (2p)

7. Redogör för den logistiska modellen för populationstillväxt och motivera dess utseende. (6p)

Lycka till!
Thomas W

Anonym kod	TMV130, Matematisk analys i en variabel V1/AT1 , 150817	sid nr. 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm $\dfrac{d}{dx}\left(\int_x^0 \sqrt{1+t^2}\,dt\right)$ (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{4-x^2}\,dx$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' = x^2y^2 \\ y(2) = 1 \end{cases}$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Lös differentialekvationen $y'' + y' - 2y = 4x$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2, kring $x = 1$, för funktionen $f(x) = x^2 - 2x + 3$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

Formelblad

Trigonometri.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \quad , \quad |x| < 1 \quad , \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad , \quad -1 < x \le 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| \le 1$$