MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Matematisk analys i en variabel E1 (TMV135) 2006-04-22

Skrivtid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling på baksidan.
Telefon: David Rydh 0762-72 18 60, Henrik Seppänen 0762-72 18 61.
För godkänt krävs minst 20 poäng.
Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

---

1 Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y' - \frac{1}{x}y = -xe^{-x}.$$

Ange också den lösning som uppfyller

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

6 p

2 Bestäm en primitiv funktion till funktionen $x\ln(1+x)$. 6 p

3 Lös differentialekvationen

$$y'' - 2y' + y = \sin x, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$$

8 p

4 Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^2 \sin x}.$$

6 p

5 Beräkna längden av kurvan

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x, \quad 1 \le x \le 4.$$

6 p

6 Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{2}{x^2-4}dx$$

är konvergent, och beräkna i så fall dess värde. 6 p

7 Då en cell växer, sker detta till en början så att ökningen av massan per tidsenhet är proportionell mot cellens begränsningsarea. Man kan anta att cellen är sfärisk och att dess densitet är konstant. Vid en given tidpunkt $t = 0$ är cellens massa m_0 och T tidsenheter senare är den $2m_0$. Härled en formel för cellens massa $m(t)$ som funktion av tiden t. 6 p

8 (a) Skissera ett bevis för *Analysens huvudsats.*

(b) Beräkna

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt.$$

6 p

Lycka till! /VA

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$