TMV136 Matematisk analys i en variabel E, lp II, läsåret 2007-2008 Vecko–PM läsvecka 6

RA, kap 6.6-6.8, 9.1-9.4, 9.6, 9.7, 9.9

RA 4.7-4.9 från förra veckan.

6.6-6.8: Numerisk integration (jmfr laboration 2, datorlab rörande integraler).

Innehåll: *Trapetsmetoden* bygger på att man indelar integrationsintervallet i delintervall och lokalt på varje delintervall approximerar integranden med ett förstagradspolynom. *Simpsons metod* använder sig lokalt av andragradspolynom. Användes Taylorutveckling av en godtycklig ordning, lokalt, kan man ju i princip approximera integranden med ett polynom av godtycklig grad. Svårigheten med en sådan metod, förutom att det förutsätter att integranden är tillräckligt reguljär (har tillräckligt många derivator), är ju att komplexitetsgraden snabbt ökar med polynomets (godtyckliga) grad. Istället kan man ju då använda hela intervallet (alltså ingen intervallindelning) och Taylorpolynomsutveckling kring någon intervallpunkt. Detta kräver dock många termer i Taylorpolynomsutvecklingen för att resttermen ska vara liten på *hela* intervallet. Även här växer alltså komplexitetsgraden snabbt och vilken metod som är att föredra i en specifik situation är inte alltid klart utan ett vidare undersökande.
Mål: Att kunna använda *Trapetsmetoden* och *Simpsons metod* med hjälp av MATLAB.

9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.6, 9.7: Följder och serier; Taylorserier.

Innehåll: Gränsvärde av *talföljd* (d v s gränsvärde då $x \to \infty$ av funktion $f(x)$ med definitionsmängd de hela talen, $\mathbb{N}$). Serie, betecknat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, som gränsvärde av *talföljden* $S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k$ då $n \to \infty$ och om detta gränsvärde existerar så kallas gränsvärdet seriens *summa* och serien sägs vara *konvergent*. Om gränsvärdet ej existerar så sägs serien vara *divergent*. (Jmfr här motsvarande begrepp för generaliserade integraler. Precis som för sådana generaliserade integraler finns jämförelsekriterier för att avgöra en series eventuella konvergens eller divergens, i fall då vi inte explicit kan beräkna seriens summa.)
Mål: Att kunna bestämma Taylorserien för elementära funktioner samt kunna göra enkla tillämpningar av dessa serieframställningar.

Rekommenderade övningar:

Avsnitt	Demouppg., föreläsning	Demouppg., övning	Självverksamhet
9.1	1, 21	5, 17	3, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 25
9.2	1		2, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 21
9.3	1		
9.6	1	9	5, 11, 21, 33, 35
9.7	23		25, 27

RA 9.9: Fourierserier

Innehåll: Vi har i tidigare avsnitt sett att en funktion kan approximeras med ett (Taylor)polynom och vi kan skriva funktionen som (Taylor)polynomet plus en restterm som i allmänhet är av komplicerad natur och därmed svår att utläsa exakt information ur; även om den i de flesta fall går att uppskatta på ett förhållandevis enkelt vis. Vi kan slippa resttermen om funktionen är "glatt", d v s "mjuk", d v s har derivator av godtycklig ordning. Om resttermen då går mot noll då fler termer tas med i taylorpolynomet får vi att funktionen kan skrivas som en serie, en oändlig summa av explicita bitar av enkel natur och därmed tämligen enkelt hanterbara. Poängen är bl a att vi har en exakt likhet utan någon svåranalyserad restterm. (Man kan ju naturligtvis hävda att svårigheterna med resttermen bara har "sopats under mattan" då det ju har ersatts av en *oändlig* (ett annat svårhanterligt begrepp) summa, men detta är åtminstone en annan typ av svårighet och tillsammans ökar ju dessa synsätt vår förståelse.) För att på detta sätt med taylorpolynom kunna framställa en funktion med en explicit om än oändlig summa, serie, krävs ju att funktionen har godtyckligt många derivator, d v s är oändligt deriverbar. De flesta (komplicerade) funktioner är ju inte det, så frågan om hur man hanterar dessa kvarstår. Det visar sig att många (de "flesta") funktioner kan skrivas som serier, inte av polynom som i användandet av taylorpolynomen, utan av sinus- och cosinusfunktioner med olika (oändligt många) frekvenser, men dessa trigonometriska funktioner är ju nästan lika enkla som polynom. (Jmfr tonerna alstrade av t ex en violinsträng, och dess övertoner.) Sådana serier kallas fourierserier och om funktionen bara har två (kontinuerliga) derivator så är det enkelt att se att funktionen framställs av en sådan fourierserie. Faktiskt så krävs väldigt lite av funktionen för att denna metod med fourierserier ska kunna användas; ngt som visades av den svenske matematikern Lennart Carleson på 60-talet. Carleson bevisade 1966 att om bara $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx$ är ett ändligt tal, så är f lika med summan av sin Fourierserie nästan överallt i intervallet $[-\pi,\pi]$. Det betyder att om man, bildligt talat, står i begrepp att sätta pennan slumpvis någonstans mellan $-\pi$ och π, så är sannolikheten noll för att hamna där f inte är lika med seriens summa.

Mål: Ha (snabbt och) översiktligt läst igenom kap 9.9 och bekantat sig med fourierserier; ngt som studeras i kommande kurser.