

Tentamen i Envariabelanalys del B för M1/TD1, 05-12-17

Lösningar

1. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^x \ln(1-x)}{x^2}.$$

Kända Maclaurinutvecklingar ger

$$\frac{x + e^x \ln(1-x)}{x^2} = \frac{x + (1 + x + O(x^2))(-x - \frac{x^2}{2} + O(x^3))}{x^2} = \frac{-\frac{3x^2}{2} + O(x^3)}{O(x^2)} = -\frac{3}{2} + O(x).$$

Svar: $-3/2$.

2. Beräkna

$$(a) \int_4^\infty e^{-\sqrt{x}} dx \quad (b) \int \frac{4-x^2}{x^3+2x^2+x} dx \quad (c) \int_{-1}^1 x^4(1+\tan x) dx$$

(a) Substitutionen $x = t^2$ och partialintegration ger

$$\int_4^\infty e^{-\sqrt{x}} dx = \int_2^\infty e^{-t} 2t dt = [-2te^{-t}]_2^\infty + \int_2^\infty 2e^{-t} dt = [-2te^{-t} - 2e^{-t}]_2^\infty.$$

Detta skall tolkas som gränsvärdet

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (-2Re^{-R} - 2e^{-R} + 4e^{-2} + 2e^{-2}) = 6e^{-2}.$$

Svar: $6e^{-2}$.(b) Nämnaren faktoriseras som $x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$. Ansatsen

$$\frac{4-x^2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

ger $A = 4$, $B = -5$, $C = -3$, varefter man kan skriva upp den primitiva funktionen.**Svar:** $4 \ln|x| - 5 \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + D$.(c) Eftersom $\tan x$ är udda så är

$$\int_{-1}^1 x^4(1+\tan x) dx = \int_{-1}^1 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5}.$$

Svar: $2/5$.

3. Lös differentialekvationen

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Karakteristiska ekvationen $r^2 + 2r + 2 = 0$ har lösningarna $r = -1 \pm i$. Homogena lösningen är alltså $e^{-x}(A \cos x + B \sin x)$. En partikulärlösning kan hittas med ansatsen $y = Ce^{-x}$, ger $C = 1$. Allmänna lösningen är alltså $y(x) = e^{-x}(1 + A \cos x + B \sin x)$. Begynnelsevillkoren ger slutligen $A = -1$, $B = 0$.

Svar: $y(x) = e^{-x}(1 - \cos x)$.

4. Lös differentialekvationerna

$$\begin{aligned} xy' &= x^2 - 3y, & y(1) &= 1, \\ xy' &= 2y(y+1), & y(1) &= 1. \end{aligned}$$

(a) Ekvationen är linjär och kan skrivas

$$y' + \frac{3}{x}y = x.$$

Integrerande faktor är x^3 , ger

$$(x^3 y)' = x^4 \Leftrightarrow x^3 y = \frac{x^5}{5} + C \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{5} + \frac{C}{x^3}.$$

Begynnelsevillkoret ger slutligen $C = 4/5$.

Svar: $y(x) = \frac{x^2}{5} + \frac{4}{5x^3}$.

(b) Ekvationen är separabel och kan skrivas

$$\int \frac{1}{y(y+1)} dy = \int \frac{2}{x} dx.$$

Efter partialbråksuppdelning i vänsterledet ger detta

$$\ln \left| \frac{y}{y+1} \right| = \ln(x^2) + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{y+1} = Ax^2$$

(där $A = \pm e^C$). Begynnelsevillkoret ger $A = 1/2$. Löser vi ut y får vi slutligen

$$\frac{y}{y+1} = \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2}{2-x^2}.$$

Svar: $y(x) = x^2/(2-x^2)$.

5. Området som begränsas av kurvan $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, och x -axeln roterar kring (a) x -axeln, (b) y -axeln. Beräkna de volymer som genereras.

(a) Integration över skivor vinkelräta mot x -axeln ger

$$\pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

(b) Integration över rör parallella med y -axeln ger

$$2\pi \int_0^\pi \sin x dx = 2\pi [-\cos x]_0^\pi = 4\pi.$$

Svar: $\pi^2/2$ respektive 4π .

6. Ett föremål i rätlinjig rörelse bromsas med en retardation som är proportionell mot kvadratroten ur hastigheten. Beräkna bromssträckan. Inför själv lämpliga beteckningar!

Låt $v(t)$ beteckna hastigheten vid tiden t . Då är $v' = -k\sqrt{v}$. Detta är en separabel ekvation med lösningen

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -k \int dt \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{v} = -kt + C.$$

För att finna en fysikalisk tolkning av C stoppar vi in $t = 0$ och $v = v_0$, ger $C = 2\sqrt{v_0}$. Vi löser sedan ut v , ger

$$v(t) = \left(\sqrt{v_0} - \frac{kt}{2} \right)^2.$$

Integrerar vi detta får vi läget $s(t)$ vid tiden t , dvs

$$s(t) = -\frac{2}{3k} \left(\sqrt{v_0} - \frac{kt}{2} \right)^3 + D.$$

Från uttrycket för v ser vi att $v(t) = 0$ då parentesen är 0, så D är partikelns slutliga läge. Å andra sidan är $s(0) = -\frac{2}{3k}(v_0)^{3/2} + D$. Totala bromssträckan är alltså $\frac{2}{3k}(v_0)^{3/2}$.

Svar: $\frac{2}{3k}(v_0)^{3/2}$, där v_0 är begynnelsehastigheten och k den i uppgiften antydda proportionalitetskonstanten.

7. (a) Skissera ett bevis för *Analysens huvudsats*. (b) Beräkna

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} e^{t^2} dt.$$

För (a), se någon lärobok i matematisk analys. För (b) låter vi $F(t)$ beteckna en primitiv funktion till e^{t^2} . Enligt analysens huvudsats eller insättningsformeln ges integralen då av $F(x^2) - F(x)$. Derivatans av detta är $2xF'(x^2) - F'(x) = 2xe^{x^4} - e^{x^2}$.

Svar: $2xe^{x^4} - e^{x^2}$.