MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Matematisk analys i en variabel E1 (TMV135) 2006-08-25

Skrivtid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling på baksidan.
Telefon: Elisabeth Vulcan, Elin Götmark, 076-272 18 60, 076-272 18 61
För godkänt krävs minst 20 poäng.
Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

---

1 Beräkna

$$(a)\ \int_1^2 \frac{1}{x(x-3)}dx \qquad (b)\ \int_0^\pi x^2 \sin x dx \qquad (c)\ \int_0^\infty xe^{-x^2}dx$$

4+4+2 p

2 Lös differentialekvationerna

(a) $y' = \frac{x}{y} \quad y(1) = \frac{1}{2}$

(b) $y' + \frac{2}{x}y = x, \quad y(1) = 1$

4+4 p

3 Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + y' - 2y = \cos^2 x.$$

6 p

4 Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x \sin x}$$

6 p

5 Området som begränsas av kurvorna $y = x$, och $y = x^2$ roterar kring x-axeln. Beräkna volymen av den begränsade kropp som genereras. 6 p

6 Två cisterner A och B, som vardera har volymen 100 l, är förbundna med varandra genom ett rör R_2. Cisternen A är helt fylld med saltlösning, som innehåller 10 kg salt, och cisternen B är helt fylld med vatten. Då man börjar pumpa in vatten i A genom ett rör R_1 i en takt av 3 l/min, trycks saltlösning genom röret R_2 till B, varvid vätskeöverskottet rinner över kanten (volymen konstant). Saltkoncentrationen hålls likformig i var och en av cisternerna genom effektiva blandare.
a) Hur mycket salt innehåller B efter en timme? b) Vilken blir den maximala saltmängden i B och när inträffar den?

6 p

7 (a) Vad menas med *riktningsfältet* till en differentialekvation av första ordningen?

(b) Visa att $y = xe^x$ och $y = x^2e^x$ inte båda kan vara lösning till en och samma differentialekvation av första ordningen.

8 p

Lycka till! VA

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$