# Lösningsförslag till Mat. analys i en variabel E1 (TMV136), 061222

1. Variabelsubstitutionen $t = \sqrt{x}$ ger oss att $dx = 2tdt$ så
$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx = \int_0^2 2te^t\ dt = 2[te^t]_0^2 - 2\int_0^2 e^t dt = 4e^2 - 2[e^t]_0^2 = \mathbf{2(e^2+1)}.$$

2. Ekvationen är separabel och kan skrivas $D(-y^{-1}) = 1/(1+x^2)$. Detta ger oss
$$-\frac{1}{y} = \int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + C,$$
dvs $y(x) = (-C - \arctan x)^{-1}$. För att detta uttryck ska gå mot $\infty$ då $x \to \infty$ måste $-C = \pi/2$. Alltså $\mathbf{y(x) = (\pi/2 - \arctan x)^{-1}}$.

3. Vi har att $V = 2\pi \int_0^1 x \arctan x dx$. Partialintegration ger
$$\int_0^1 x\arctan x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 1 - \frac{1}{x^2+1}dx$$
ty $\arctan 1 = \pi/4$. Vi har således att
$$V = 2\pi\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x - \arctan x]_0^1\right) = 2\pi\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\boldsymbol{\pi^2 - 2\pi}}{\mathbf{2}}.$$

4. Partialbråksuppdelning ger oss att $4/(x^2(x+2)) = -1/x + 2/x^2 + 1/(x+2)$ så
$$\int_1^\infty \frac{4}{x^2(x+2)}\ dx = \lim_{R\to\infty}[-\ln|x| - 2x^{-1} + \ln|x+2|]_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(\ln\frac{R+2}{R} - \frac{2}{R} - (\ln 3 - 2)\right) = \mathbf{2 - \ln 3}.$$

5. Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 3$ har lösningarna $r_1 = 1$ och $r_2 = 3$. Den allmänna homogena lösningen är alltså $Ae^x + Be^{3x}$. En partikulärlösning $y_p$ finner vi genom ansättningen $y_p = Cx + D$, vilket ger oss $y_p = x + 2$. Alltså är $y = Ae^x + Be^{3x} + x + 2$ en allmän lösning till vår ekvation. Begynnelsevillkoren ger oss att $A = -3$ och $B = 1$, dvs $\mathbf{y = -3e^x + e^{3x} + x + 2}$.

6. Standardutvecklingar ger oss
$$\frac{x\cos x - \sin x}{x^2\sin 2x} = \frac{x(1 - x^2/2 + O(x^4)) - (x - x^3/6 + O(x^5))}{x^2(2x + O(x^3))} = \frac{-x^3/3 + O(x^5)}{2x^3 + O(x^5)},$$
som går mot $\mathbf{-1/6}$ då $x \to 0$.

7. Euler ODE. Sätt $t = \ln x$ ger med $D \equiv \frac{d}{dt}$ att $P(D)y \equiv (D^2 + 4D + 13)y = \sin t + 13t + 4$, som har kar. ekv. $r^2 + 4r + 13 = 0$ med lösn. $r_{1,2} = -2 \pm 3i$ vilket ger $y_h = e^{-2t}(A\cos 3t + B\sin 3t)$. Nu är $y_p = y_{p1} + y_{p2}$, där vi finner $y_{p1}$ genom att lösa $P(D)y = \sin t$ för vilket vi ansätter $y_{p1} = C_1\cos t + C_2 \sin t$ och finner att $y_{p1} = \frac{1}{40}(3\sin t - \cos t)$. Vi finner $y_{p2}$ genom att lösa $P(D)y = 13t + 4$ för vilket vi ansätter $y_{p2} = at + b$ vilket ger $y_{p2} = t$ och slutligen $y = \frac{1}{x^2}(A\cos(3\ln x) + B\sin(3\ln x)) + \frac{1}{40}(3\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + \ln x$.

8. (inskriva -06): Problemet som löses numeriskt är begynnelsevärdesproblemet $x'' = -x^3 - (5/100)x'$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ och lösningen presenteras grafiskt genom att rita grafen $\{(t, x(t)) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 150\}$ för lösningen $x(t)$.

   (inskriva -05 eller tidigare): Har att $\ln n^2 = 2\ln n \leq n$ då $n$ stort ty $\ln n/n \to 0$ $(n \to \infty)$. Men $\sum_{n=1}^\infty 1/n = \infty$ alltså **divergerar a)**. b) Vi har att $\sin n^{-2}/n^{-2} \to 1$ då $n \to \infty$. Eftersom $\sum_{n=1}^\infty n^{-2} < \infty$ så **konvergerar b)**. c) Har att $(n/4^n)/(1/2^n) = n/2^n \to 0$ och eftersom $\sum_{n=1}^\infty 1/2^n$ konvergerar så **konvergerar c)**.