

Matematisk analys i en variabel E1 (TMV136) 2006-12-22

Skrivtid: 8.30-12.30

Hjälpmiddel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling på baksidan.

Telefon: Tobias Gebäck och Henrik Seppänen, 0762-721860, 0762-721861

För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

1 Beräkna

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$$

(6p)

2 Bestäm lösningen $y(x)$ till

$$y' = \frac{y^2}{1+x^2}$$

som uppfyller $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty$.

(6p)

3 Linjerna $x = 1$, $y = 0$ samt kurvan $y = \arctan x$ begränsar för $0 \leq x \leq 1$ ett område. Bestäm volymen V av den kropp som bildas då detta område roterar kring y -axeln.

(6p)

4 Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{4}{x^2(x+2)} dx$$

(kan du bara visa att den är konvergent så ger det delpoäng).

(6p)

5 Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' - 4y' + 3y = 3x + 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(6p)

6 Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin 2x}$$

(7p)

7 Lös differentialekvationen

$$x^2 y'' + 5xy' + 13y = \sin(\ln x) + \ln(x^{13}) + 4, \quad x > 0$$

(9p)

8 (inskrivna -06) Matlabkommandona nedan löser approximativt ett visst problem och presenterar lösningen; ange vilket problem som löses och hur lösningen presenteras.

```
>> f=inline(' [y(2); -y(1)^3-0.05*y(2)] ','t','y');
>> tspan=[0 150];
>> c=[1; 0];
>> [t,y]=ode45(f,tspan,c);
>> plot(t,y(:,1))
```

(4p)

vgv

8 (inskrivna -05 eller tidigare) Ange om följande serier konvergerar eller ej (motivera, endast svar räcker ej)

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^2)} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}.$$

(4p)

VA

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$