Matematik Chalmers
Matematisk analys i en variabel (för M och TD), TMV150/180
Examinator: *Henrik Petersson*

TENTAMEN: 2007-04-14
Skrivtid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Jonas H/Oskar M (0762-721860/0762-721861)

1. Beräkna
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx.$$
(6p)

2. Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = (\arctan x)/x^2$. (6p)

3. Beräkna längden L av funktionskurvan $f(x) = 2x\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$. (6p)

4. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arctan x - \arctan 2x}{3\sin x - \sin 3x}.$$
(6p)

5. Beräkna den generaliserade integralen
$$\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx.$$
(6p)

6. Lös begynnelsevärdesproblemet
$$y'' - 4y' + 4y = e^x, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$
(6p)

7. Funktionen $y = y(x)$ är godtyckligt många gånger deriverbar kring $x = 0$ och uppfyller differentialekvationen
$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 0.$$
Beräkna $\lim_{x\to 0} y(x)/x^3$. (6p)

8. (a) Bevisa att $\lim_{h\to 0} h^{-1}\int_0^h f(x)dx = f(0)$ då f är kontinuerlig kring $x = 0$.
   (b) Visa att $y(x) = (1 - \arctan x)^{-1}$ är en lösning till differentialekvationen $(1 + x^2)y' = y^2$ samt beräkna
$$\int_0^1 \frac{1}{(1-\arctan x)^2(1+x^2)}dx.$$
(2+6=8p)

För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4:30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Skriv linje samt inskrivningsår på skrivningsomslaget. Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad. Sortera uppgifterna i ordning och numrera sedan sidorna.

LÖSNINGSFÖRSLAG
Tentamen 2007-04-14 TMV150/180.

1. Variabelbytet $t = \sin x$, och därmed $\cos x dx = dt$, ger oss

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^1 = \mathbf{\frac{\pi}{4}}.$$

2. En förberedande partialintegration ger oss $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$. Ansättningen $A/x + (Bx+C)/(x^2+1) = 1/x(x^2+1)$ ger oss att $A = 1$, $B = -1$ samt $C = 0$ så

$$\int \frac{\arctan x}{x^2} dx = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} dx = -\frac{\arctan \mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \ln|\mathbf{x}| - \frac{\ln(\mathbf{x^2+1})}{\mathbf{2}}.$$

3. Har att $L = \int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2} dx$ och $f'(x) = 3\sqrt{x}$ så

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+9x} dx = \left[\frac{2[1+9x]^{3/2}}{27}\right]_0^1 = \mathbf{\frac{2}{27}(10^{3/2}-1)}.$$

4. Standardutvecklingar ger

$$\frac{2\arctan x - \arctan 2x}{3\sin x - \sin 3x} = \frac{2(x - x^3/3) - (2x - 8x^3/3) + O(x^4)}{3(x - x^3/6) - (3x - 27x^3/6) + O(x^4)} = \frac{2x^3 + O(x^4)}{4x^3 + O(x^4)} \to \mathbf{\frac{1}{2}}.$$

5. Upprepad partialintegration ger

$$\int_0^R x^2 e^{-x} dx = [-x^2e^{-x}]_0^R + \int_0^R 2xe^{-x} dx = [-x^2e^{-x}]_0^R + [-2xe^{-x}]_0^R + \int_0^R 2e^{-x} dx \to \mathbf{2}.$$

6. Karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 4 = 0$ har dubbelroten $r = 2$, så allmänna homogena lösningen y_h är $(Ax+B)e^{2x}$. En partikulärlösning y_p hittar vi genom ansättningen $y_p = Ce^x$, vilken ger $C = 1$ dvs $y_p = e^x$. Alltså är $y = y_h + y_p = (Ax+B)e^{2x} + e^x$ en allmän lösning. Begynnelsevillkoren ger oss att $B + 1 = 1$ samt $A + 2B + 1 = 0$, dvs $B = 0$ och $A = -1$. Alltså är $\mathbf{y = -xe^{2x} + e^x}$.

7. Insättning av $x = 0$ i ekvationen ger att $y'(0) = 0$. Derivering ger $y'' = 2x + 2yy'$, så speciellt är $y''(0) = 0$. Ytterligare en derivering ger $y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy''$. Alltså är $y'''(0) = 2$. Taylors formel ger nu att $y(x) = 2x^3/3! + O(x^4) = x^3/3 + O(x^4)$. Alltså är $\lim_{x\to 0} y(x)/x^3 = \mathbf{1/3}$.

8. (a) Integalkalkylens Medelvärdessats ger oss att $h^{-1}\int_0^h f(x)dx = f(s)$ för något $s = s(h)$ mellan 0 och h. Eftersom f är kontinuerlig i $x = 0$ måste $h^{-1}\int_0^h f(x)dx = f(s) \to f(0)$ då $h \to 0$. (Detta är ett specialfall av Analysens Huvudsats.)

(b) Med $y = (1-\arctan x)^{-1}$ har vi $y' = -(1-\arctan x)^{-2}(-(1+x^2)^{-1}) = y^2/(1+x^2)$, så $y = (1-\arctan x)^{-1}$ löser DE. Alltså är $y(x)$ en primitiv funktion till $y^2/(1+x^2) = 1/(1-\arctan x)^2(1+x^2)$ vilket ger oss

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-\arctan x)^2(1+x^2)} dx = \left[\frac{1}{1-\arctan x}\right]_0^1 = \frac{4}{4-\pi} - 1 = \mathbf{\frac{\pi}{4-\pi}}.$$