Lab 3: Numerisk integration.

Laborationens syfte:

- Att studera en enkel metod att approximera en integral med en summa.
- Att tillverka en funktionsfil i Matlab för denna metod.
- Att testa den på några exempel, kombinerat med en feluppskattning i ett av exemplen.
- Att undersöka och testa Matlab-kommandot *quadl* för integralberäkning.

1 Trapetsmetoden

Trapetsmetoden finns beskriven i Adams 6.6 (sid 348-354). Läs om den innan du går vidare.

Uppgift 1: Skriv en funktionsfil `trap(f,a,b,n)` som beräknar en integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

med hjälp av trapetsformeln. Indata skall vara en funktion, integrationsgränser samt antalet delintervall. Observera att hela beräkningen med fördel görs utan loopar - arbeta istället med en vektor innehållande alla delningspunkter på x-axeln och en vektor med motsvarande funktionsvärden. Elementvisa operationer och kommandot `sum` löser problemet. Funktionen matas med fördel in som en anonym funktion. Redan existerande funktionsfiler kan förstås också användas, och man skriver då t ex `trap(@sin,0,pi,100)`.
Testa filen på följande exempel:

a) Beräkna integralen $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ med trapetsmetoden.
Testa med 10, 100 och 1000 delintervall. Titta på feluppskattningen i sats 4 sid 352 i Adams! Använd den för att uppskatta (dvs hitta en övre begränsning för) felet i de tre testfallen. (Du måste undersöka andraderivatans värden i $[0, 1]$).

b) Beräkna den konvergenta generaliserade integralen $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ med trapetsmetoden. Vi måste ha en ändlig övre integrationsgräns R, och får då uppskatta "svansen" $\int_R^\infty e^{-x^2}dx$ som vi därmed kastar bort. Detta fel ska adderas till felet i trapetsformeln. Pröva med $R = 4$ och beräkna alltså $\int_0^4 e^{-x^2}dx$ med trapetsmetoden, 1000 delintervall, samt uppskatta "svansen" och ange ett närmevärde för den generaliserade integralen med felgräns.
Tips: för $x \geq 4$ är $-x^2 \leq -4x$.

$\square$

Uppgift 2: En lång krumelur
Studera kurvan $x = t + 2\sin 2t,\ y = t + 2\cos 5t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Detta kan göras genom att man plottar den med Matlab. Starta med en radvektor t, beräkna x och y, använd *plot(x,y)*. Kommandot *axis equal* rättar till skalorna. Försök göra en grov förhandsskattning av den ritade kurvans längd.
Beräkna nu kurvans längd med trapetsmetoden, formel - se Adams sid 454. (Feluppskattning krävs inte). $\square$

2 Verktyg för integralberäkning i Matlab

Undersök hur man använder kommandot *quadl* för integralberäkning. *quadl* utnyttjar en mera avancerad integralapproximation med adaptiv intervallindelning, dvs intervallängden görs extra liten där integranden är besvärlig (t ex varierar mycket). (Den närbesläktade och något enklare *quad* använder Simpsons formel - Adams sid 355 - med adaptiv intervallindelning).

Uppgift 3: Beräkna integralerna i alla tidigare uppgifter med *quadl* och jämför resultaten! □