Lab 4: Numerisk lösning av ordinära differentialekvationer.

Laborationens syfte:

- Att studera enklast möjliga metod att numeriskt lösa en differentialekvation av första ordningen.
- Att testa en funktionsfil i Matlab för denna metod på några exempel.
- Att undersöka och testa Matlab-kommandot *ode45* för lösning av samma differentialekvationer.
- Att använda *ode45* för att lösa ett system av differentialekvationer.
- Att använda *ode45* för att lösa differentialekvationer av andra ordningen genom att skriva om dem som system av första ordningen.

Uppgifterna i avsnitt 1 ska redovisas vid dator. Uppgifterna i avsnitt 2 och 3 ska inte redovisas.

1 Differentialekvationer av första ordningen

1.1 Eulers metod

Den enklaste metoden för lösning av en ODE av första ordningen är *Eulers metod* - se Adams sid 911f. Studera hur den fungerar!
Antag vi vill lösa ett begynnelsevärdesproblem av typen $y' = f(x, y), \ \ y(a) = c$ i intervallet $[a, b]$.
Eulers metod med steglängd h:
$x_0 = a, \ \ y_0 = c$
$x_{n+1} = x_n + h, \ \ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \ \ n = 0, 1, 2, \ldots$
Studera noga följande funktionsfil och verifiera att den ger en approximativ lösning enligt Eulers metod med beteckningar f, a, b, c, h enligt ovan:

```
function [x,y]=euler(f,a,b,c,h)
x=a:h:b;
m=length(x);  %antalet element i x-vektorn
y=zeros(m,1); %här formateras vektorn av y-värden som en
              %kolonnvektor till en början fylld med nollor
y(1)=c;
for i=1:m-1
   y(i+1)=y(i)+h*f(x(i),y(i));
end
```

Exempel: Lös $y' = x + y^2, \ \ y(0) = -1$ i intervallet $[0, 2]$. Vi väljer steglängden $h = 0.01$ och skriver:

```
[x,y]=euler(@(x,y)x+y.^2,0,2,-1,0.01);plot(x,y)
```

Här plottar vi lösningskurvan direkt istället för att titta på vektorn av alla funktionsvärdena.
Felet vid Eulers metod är för ett givet lösningsintervall ungefärligen proportionellt mot h, se Adams sid 912. Mera uppgifter, se 1.3!

1.2 Matlab-kommandot ode45

I Matlab finns ett lösningskommando för ordinära differentialekvationer: *ode45*. Här används lösningsmetoder av högre ordning (jfr Adams sid 913-915) där felet blir proportionellt mot h^4 eller bättre.
Exempel: Vi vill återigen lösa $y' = x + y^2, \ \ y(0) = -1$ i intervallet $[0, 2]$.
Kommandot `ode45` anropas enligt

```
[x,y]=ode45(@(x,y)x+y.^2,[0,2],-1);
```

om man utnyttjar anonym funktion. Begynnelsevillkoret måste avse vänstra ändpunkten av angivet intervall. Det är också viktigt att den anonyma funktionen anges bero på både x och y, även om bara den ena variabeln syns till i ekvationen. Detta gäller också om man vill tillverka $f(x, y)$ som funktionsfil:

```
function f=fun(x,y)
f=x+y.^2;
```

Därefter skriver man i detta fall:

```
[x,y]=ode45(@fun,[0,2],-1);
```

$[x, y]$ är nu en värdetabell för lösningen, så det är kanske intressantare att plotta lösningskurvan i stället för att titta på en diger värdetabell - därav semikolon!

```
plot(x,y)
```

Toleransen är ställd på 10^{-3} i relativt fel, 10^{-6} i absolut fel (högre noggrannhet kan beställas, se *help ode45*).

1.3 Uppgifter

Uppgift 1: Lös ODE:n $y' = 3y(1-y)$ dels med funktionsfilen *euler*, dels med *ode45*. Plotta flera lösningar i samma figur (använd *hold on*) med olika begynnelsevärden $y(0)$ mellan 0 och 2. Välj själv lösningsintervall, steglängd t.ex. 0.01. □

Uppgift 2: Lös begynnelsevärdesproblemet 7.9.19 i Adams med *euler* med olika steglängder i intervallet $[1,3]$. Plotta dessa lösningar och lösningskurvan enligt facit i samma figur med olika färger. T. ex. ger `plot(x,y,'r')` en röd kurva. Lägg också in lösningen med *ode45* i samma figur.
□

2 System av differentialekvationer av första ordningen

Studera och begrunda följande två differentialekvationer, *Volterra-Lotkas* ekvationer för rovdjur/bytesdjur: $y_1' = (1-\frac{y_2}{50})y_1,\ y_2' = (-1+\frac{y_1}{200})y_2$. y_1 är bytesdjur, t ex harar, y_2 är rovdjur, t ex lodjur. Observera hur ekvationerna beror av varandra - de utgör ett *system av ordinära differentialekvationer*. Vill man lösa ett *system av ODE*, så gör man detta på samma sätt, men f är då en vektorfunktion. Denna genereras av en ode-fil där f ska tillverkas som en *kolonnvektor*.
Exempel: $y_1' = 2y_1 - 3y_2,\ y_2' = -3y_1 + 2y_2,\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1$.
Lösning med *ode45* på intervallet $[0,2]$ med angivna begynnelsevillkor:

```
[x,y]=ode45(@[2*y(1)-3*y(2);-3*y(1)+2*y(2)],[0,2],[0,1]);
```

Den tabell $[x,y]$ som erhålls, består av 3 kolonner, en för x, en för y_1 och en för y_2. Här kan man nu välja om man vill plotta de båda lösningskurvorna:

```
plot(x,y)
```

eller första kolonnen i y mot den andra om man vill se hur y_1 och y_2 är relaterade i en s k *faskurva*:

```
plot(y(:,1),y(:,2)
```

Uppgift 3: Lös *Volterra-Lotkas system* för rovdjur/bytesdjur och plotta de båda lösningskurvorna. Plotta sedan faskurvan. Välj antalet bytesdjur vid tiden noll betydligt större än antalet rovdjur.
□

Uppgift 4: *Lorenz-systemet*:
$x' = -ax + ay,\ y' = rx - y - xz,\ z' = xy - bz$. (Variabel $t =$ tiden)
Detta system av tre ODE, en linjär och två icke-linjära, användes av Edward Lorenz för bl a väderprognoser (1963). Lösningarna uppvisar en extrem känslighet för förändringar i begynnelsevärdena. Lös systemet med parametervalet $a = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$, och med begynnelsepunkten $(0.001, 0, 0)$. Använd sedan kommandot `plot3` (3D-plot, se Matlab help, och undersök också hur man kan använda kommandot `view`) för att plotta faskurvan $(x(t), y(t), z(t))$. Plotta också lösningskurvan $x(t)$. □

3 Differentialekvationer av högre ordning

En ODE av högre ordning än ett kan omvandlas till ett system av första ordningens ODE. Detta görs genom att man låter derivatorna utgöra nya funktionsvariabler: $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$ etc.
Exempel på en ODE av andra ordningen: $y'' = x^2 + y^2y'$
Sätt $y_1 = y$ och $y_2 = y'$, så får vi systemet $y_1' = y_2,\ y_2' = x^2 + y_1^2y_2$.
Med begynnelsevillkoret $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$ löser vi på intervallet $[0,2]$:

```
[x,y]=ode45(@(x,y)[y(2);x.^2+y(1).^2.*y(2)],[0,1],[1,0]);
```

`plot(x,y(:,1))` ger lösningskurvan.
`plot(y(:,1),y(;,2))` ger en fasplot (sambandet mellan $y(x)$ och $y'(x)$).

Uppgift 5: Ekvationen för en *plan pendel*: $y'' = -\frac{g}{l}\sin y - ky'$. Här är y pendelutslaget (radianer), g är tyngdaccelerationen ($\approx 10m/s^2$) och l är pendelns längd, $-ky'$, $(k > 0)$, är en dämpningsterm. Begynnelsevärden: $y(0)$ är den vinkel som pendeln släpps ifrån, $y'(0)$ är vinkelhastigheten i detta ögonblick (som är noll om pendeln släpps från stillastående). Gör en plot av lösningskurvan och en fasplot (olika figurer). Pröva t. ex. $g/l = 10,\ \ k = 0.5,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 20$. Tolka kurvorna fysikaliskt! □