Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, TMV136

2009 08 21 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.
Telefon: Jonatan Vasilis, 0762 72 18 61
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Bonuspoäng från hösten 2008 ingår.
Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida :
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv136/0809/
Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' - y = e^x$ (6p)
   som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = x^2 y$ (6p)
   som uppfyller begynnelsevillkoret $y(1) = 1$.

3. Lös begynnelsevärdesproblemet (6p)
   $y'' - 3y' + 2y = e^{5x} \quad y(0) = \frac{1}{6}, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$

4. (a) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 2x \arctan x \, dx$. (4p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} \, dx$ (4p)

5. Betrakta funktionen $f(x) = (1 - \cos x^3) \ln(1 + x^3)$. (6p)

   (a) Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 15 till f.

   (b) Beräkna derivatorna $f^{(n)}(0)$ för $1 \leq n \leq 15$

6. Kalkylen (6p)

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{(2x+1)^2} \, dx = \left[-\frac{1}{2x+1}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

   är uppenbarligen felaktig, eftersom integranden är positiv. Vad är felet?
   Hur borde man ha behandlat integralen och vad blir resultatet?

7. En kropp fyller upp området $x + y + z \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0$, (6p)
   dvs tetraedern med hörn i punkterna $(0,0,0), \ (1,0,0), \ (0,1,0), \ (0,0,1)$.
   Kroppens densitet i (x, y, z) är $z \ kg/m^3$. Beräkna dess massa.

8. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^3 x(3-x)e^{(x-1)(x-2)} \, dx$ approximativt med (3p)
   trapetsmetoden, tre delintervall. Ingen feluppskattning krävs.

   (b) Visa att serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^3 - a_n^3)$ är konvergent om och endast om $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar. (3p)

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$