Matematisk analys i en variabel E1 (TMV136) 2007-12-21

Skrivtid: 8.30-12.30 Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling på baksidan.
Telefon: Adam Wojciechowski, 0762-721860
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

---

1 Beräkna

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-3)}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

(7p)

2 Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' + xy = x, \qquad y(0) = 7$$

(6p)

3 Bestäm volymen V av den kropp som bildas då det ändliga område som begränsas av x-axeln och grafen till funktionen $y = x(2-x)$ roterar

a) runt x-axeln, b) runt y-axeln

(7p)

4 Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx$$

(kan du bara visa att den är konvergent så ger det delpoäng). (6p)

5 Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos(3x))^2}$$

(6p)

6 Lös differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

(6p)

7 a) Definiera vad som menas med en konvergent serie och en series summa.

b) Finn summan av de konvergenta av serierna $i)$ $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{4n+1}$, $ii)$ $\sum_{n=1}^{\infty} 1/3^{4n+1}$ och $iii)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(6p)

8 a) Bevisa Maclaurinutvecklingen

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

i specialfallet $f(x) = \cos x$ och $n = 2$, dvs bevisa $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$.

b) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt$.

(6p)

formelsamling, vgv

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$
$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$
$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$