Matematisk analys i en variabel E1 (TMV136) 2008-03-29

Skrivtid: 8.30-12.30 Lärares närvaro i sal: ca. 9.30 och 11.30. Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling på baksidan. Telefon: Magnus Goffeng, 0762-721860
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

---

1 (a) Beräkna $\int \cos\sqrt{x}\,dx$ (b) Beräkna $\int_0^1 |\ln x|\,dx$ om den konvergerar. Motivera annars att den är divergent. (4p+4p)

2 Lös begynnelsevärdesproblemet
$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ (6p)

3 Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \ln(1+x^2) - \cos x}{x\sin x - x^2}$ (6p)

4 Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $0 \le y \le e^{-x^2}$ roterar kring y-axeln. (6p)

5 Bestäm alla kurvor i planet som har den egenskapen att tangenten i en punkt (x, y) skär x-axeln i punkten $(-x, 0)$. (6p)

6 Lös differentialekvationen

$$x^2y'' + 5xy' + 13y = \sin(\ln x) + \ln(x^{13}) + 4, \quad x > 0$$

(6p)

7 Definiera vad som menas med att en serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är (6p)
(a) konvergent
(b) absolutkonvergent.
(c) Ge ett exempel på en serie som är konvergent men inte absolutkonvergent.

8 Antag att f är kontinuerlig på ett intervall I och att $a \in I$. Visa att (6p)

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

är deriverbar på I och bestäm derivatan $F'(x)$.

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$
$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$
$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$