Matematisk analys i en variabel E1 (TMV136) 080822

1. a) $\int x^2(12+x^3)^{19}\,dx = \frac{1}{60}(12+x^3)^{20}+C$ b) $\int (2x+1)\ln(x+1)\,dx = [\text{PI}] = (x^2+x)\ln(1+x) -$ $\int \frac{x^2+x}{x+1}\,dx = (x^2+x)\ln(1+x) - x^2/2 + C$ c) $\int \frac{1}{2x+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} - \frac{1}{2+x}\,dx = \ln|\frac{x}{2+x}| + C.$

---

2. Kar. ekv. $0 = r^2+2r+5 \Rightarrow r_{1,2} = -1\pm 2i \Rightarrow y_h = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$. Nu är t ex $y_p = 1 \Rightarrow y = y_p + y_h = 1 + e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$ och $y(0) = 1 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y = e^{-x}B\sin 2x + 1 \Rightarrow y' = e^{-x}B(2\cos x2x - \sin 2x)$ och $y'(0) = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x + 1$.

---

3. $xe^{-x} = x(1-x+x^2/2+x^3B(x)) = x - x^2 + x^3/2 + \mathcal{O}(x^4)$, $\ln(1+t)t - t^2/2 + t^3/3 + \mathcal{O}(t^4) \Rightarrow \ln(1+xe^{-x}) = x - x^2 + x^3/2 - (1/2)(x-x^2) + (1/3)x^3 + \mathcal{O}(x^4) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^4) \Rightarrow P_3(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3$.

---

4. Division med x ger $y' + (\frac{1}{x} - 1)y = \frac{1}{x}$, $x > 0$. IF: $e^{\int \frac{1}{x} - 1} = e^{\ln x - x} = xe^{-x}$. Detta ger $\frac{d}{dx}(xe^{-x}y) = e^{-x} \Rightarrow xe^{-x}y = C - e^{-x} \Rightarrow y = \frac{1}{x}(Ce^x - 1)$. Nu gäller $|y| \to \infty$ om $C \neq 1$ och om $C = 1$ gäller $y \to 1$. Därför är $y = \frac{1}{x}(e^x - 1)$.

---

5. Volymen är $\int_0^\infty \pi(f(x))^2\,dx = \pi\int_0^\infty x^2e^{-2x}\,dx = \pi([-\frac{x^2}{2}e^{-2x}]_0^\infty + \int_0^\infty xe^{-2x}\,dx) = \pi(0 + [-\frac{x}{2}e^{-2x}]_0^\infty$ $+ \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx) = \pi(0 + 0 + [-\frac{1}{4}e^{-2x}]_0^\infty) = \pi(0 + \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{4}$.

---

6. $xy'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Då $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \mathcal{O}(x^5)$ gäller $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \mathcal{O}(x^4)$ och $xy'' = 2a_2x + 6a_3x^2 + 12a_4x^3 + \mathcal{O}(x^4)$. Därför fås $(*)$ $xy'' + y = a_0 + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 6a_3)x^2 + (a_3 + 12a_4)x^3 + \mathcal{O}(x^4)$, och $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ ger att $a_0 = 0$ och $a_1 = 1$. Vidare ger $xy'' + y = 0$ att alla koefficienter i $(*) = 0$ så att $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{12}$, $a_4 = -\frac{1}{144}$ vilket ger att

$$y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \mathcal{O}(x^5).$$

---

7. Se boken.
