Matematisk analys i en variabel E1 (TMV136) 081219

1. Sanna är: 1) ii) 2) iii) 3) i) 4) i) 5) i) 6)iii) 7) i).

---

2. i) $\int x \cos x^2\,dx = \left[\begin{array}{c} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{array}\right] = \int \frac{1}{2}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin x^2 + C,$ ii) $\frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ $= \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \Rightarrow \int \frac{2x+1}{x(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x| + \ln|x+1| + C = \ln|x(x+1)| + C,$
iii) $\int \sin\sqrt{x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ dx = 2tdt \end{array}\right] = 2\int t\sin t\,dt = [\mathrm{PI}] = 2(t(-\cos t) - \int 1\cdot(-\cos t)\,dt) = 2(-t\cos t$ $+ \int \cos t\,dt) = 2(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}) + C.$

---

3. Sökt längd L för den parametriserade kurvan mellan parametervärdena 0 och 2π ges av $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\,dt$ $= 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

---

4. $y = y_p + y_h$. För y_h : Kar. ekv.: $0 = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 \Rightarrow r_{1,2} = -1 \Rightarrow y_h = (Ax+B)e^{-x}$. För y_p : Ansätt $y_p = Cx^2e^{-x}$ ty e^{-x} och xe^{-x} finns med i y_h. Derivation ger $y_p' = Ce^{-x}(2x - x^2),\ y_p'' = Ce^{-x}(2 - 4x + x^2)$ och insättning i ekvationen ger $Ce^{-x}(2-4x+x^2) + 2Ce^{-x}(2x - x^2) + Cx^2e^{-x} = e^{-x}$ vilket ger $C = 1/2$. Alltså har vi $y = y_p + y_h = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + (Ax+B)e^{-x} = (\frac{1}{2}x^2 + Ax + B)e^{-x}$.

---

5. a) $e^t = 1 + t + \mathcal{O}(t^2)$ ger $\frac{\sqrt{e^{x^4}-1}}{x^2} = \frac{\sqrt{1+x^4+\mathcal{O}((x^4)^2)-1}}{x^2} = \frac{\sqrt{x^4(1+\mathcal{O}(x^4)}}{x^2} = \frac{|x^2|\sqrt{1+\mathcal{O}(x^4)}}{x^2} = \sqrt{1+\mathcal{O}(x^4)} \to \sqrt{1+0} = 1$
b) $(1+x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{\frac{1}{x}(x - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3))} = e^{(1-\frac{1}{2}x+\mathcal{O}(x^2))}$ då $x \to 0$. Alltså gäller $\frac{1}{x}(e^{x+1} - (1+x)^{1/x}) = \frac{1}{x}(ee^x - ee^{-\frac{1}{2}x+\mathcal{O}(x^2)}) = \frac{e}{x}(e^x - e^{-\frac{1}{2}x+\mathcal{O}(x^2)})$ då $x \to 0$. Då $t \to 0$ har vi Maclaurinutvecklingen $e^t = 1 + t + \mathcal{O}(t^2)$ och då $-\frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2) \to 0$ då $x \to 0$ ger denna Maclaurinutveckling att $e^{-\frac{1}{2}x+\mathcal{O}(x^2)} = 1 + (-\frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2)) + \mathcal{O}((-\frac{1}{2}x+\mathcal{O}(x^2))^2) = 1 - \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2)$. Alltså får vi $\frac{1}{x}(e^{x+1} - (1+x)^{1/x}) = \frac{e}{x}(1 + x + \mathcal{O}(x^2) - (1 - \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^2))) = \frac{e}{x}(\frac{3}{2}x + \mathcal{O}(x^2)) = e(\frac{3}{2} + \mathcal{O}(x)) \to \frac{3e}{2}$ då $x \to 0$.

---

6. a) Låt $S \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$. Då gäller $a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ och $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} a_k = S - S = 0$.
b) Då $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent har vi enligt a) och förutsättning att då $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gäller för tillräckligt stora n att $0 \le a_n \le 1$ så att $0 \le a_n^2 \le a_n$ och därmed enligt jämförelsekriterie för serier med icke-negativa termer har vi att då $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent så är också $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent.
c) $\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt = [\mathrm{PI}] = [f(t)\frac{\sin nt}{n}]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin nt\,dt = 0 - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin nt\,dt = [\mathrm{PI}] =$ $= -\frac{1}{n}\Big([f'(t)(\frac{-\cos nt}{n})]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f''(t)\cos nt\,dt\Big) = -\frac{1}{n}\Big(-\frac{1}{n}(f'(2\pi)\cdot 1 - f'(0)\cdot 1) + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f''(t)\cos nt\,dt\Big) =$ $= -\frac{1}{n}\Big(0 + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f''(t)\cos nt\,dt\Big) = -\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} f''(t)\cos nt\,dt$ där vi använt att $f'(x+2\pi) = f'(x)$ för alla x. Alltså får vi $|a_n| = |-\frac{1}{\pi n^2}\int_0^{2\pi} f''(t)\cos nt\,dt| \le \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{2\pi} |f''(t)|\,dt \le \frac{C}{n^2}$. Vi har att $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx| \le \sum |a_n| \le C\sum \frac{1}{n^2}$ vilken är en konvergent serie och Jämförelsekriteriet ger att också $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx|$ är konvergent för varje x, dvs serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ är absolutkonvergent för varje x, vilket speciellt betyder att serien är konvergent för varje x. Pss för b_n och vi får att hela fourierserien är konvergent för varje x.

---

7. a) Se boken. b) $\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2} e^{-x^2}\,dx = \frac{d}{dx}(\int_0^{x^2} e^{-x^2}\,dx - \int_0^{2x} e^{-x^2}\,dx) = e^{-(x^2)^2}2x - e^{-(2x)^2}2 = 2(xe^{-x^4} - e^{-4x^2})$. Observera att integrationsvariabelns namn är betydelselöst (s. k. 'dummy variable') och det vore kanske vettigare att i uppgiften skriva integralen som $\int_{2x}^{x^2} e^{-t^2}\,dt$; men det var ju del i uppgiften.
