TMV136 2009-12-17 Lösningar

1. (a) Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$

   (b) Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{(1+\cos x)\sin x}{\cos x}\,dx$

(a) Använd partiell integration - ta primitiv funktion till $\sin x$ och derivera i andra steget x:

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} 1\cdot(-\cos x)\,dx = 0 + \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Svar: 1

(b) Här tar vi istället variabelsubstitution:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{(1+\cos x)\sin x}{\cos x}\,dx = \{t=\cos x,\ dt=-\sin x\,dx\} = -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\frac{1+t}{t})\,dt =$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (\frac{1}{t}+1)\,dt = \Big[\ln t + t\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = 1-(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\ln 2}{2} = \frac{2-\sqrt{2}+\ln 2}{2}$$

Svar: $\dfrac{2-\sqrt{2}+\ln 2}{2}$

---

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = xy$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0)=2$.

Ekvationen är linjär: $y' - xy = 0$ med den integrerande faktorn $e^{\int(-x)\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$
Vi multiplicerar båda leden med denna och får

$e^{-\frac{x^2}{2}}(y'-xy) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (e^{-\frac{x^2}{2}}y)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{x^2}{2}}y = C \quad \Leftrightarrow \quad y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$

Slutligen ger begynnelsevillkoret $y(0)=2$ att $C=2$.
(Ekvationen är även separabel, och då lösningen $y=0$ inte är intressant här, kan vi skriva $\dfrac{1}{y}y' = x$ och lösa den enligt $\displaystyle\int\frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx + C$)

Svar: $y = 2e^{\frac{x^2}{2}}$

---

3. Lös begynnelsevärdesproblemet
   $y'' + y = x, \quad y(0) = y'(0) = 0$

Vi bestämmer allmänna lösningen y_h till motsvarande homogena ekvation $y''+y=0$ och därefter hittar vi **en** lösning y_p till den vi har. Alla lösningar till den senare kan då skrivas $y_h + y_p$.
Karakteristiska ekvationen $r^2+1=0$ har rötterna $r=\pm i$, varmed $y_h = C_1\cos x + C_2\sin x$
Ansätt $y_p = Ax+B$, vi får då $y_p''+y_p = Ax+B$, varför $A=1,\ B=0$ och $y_p = x$.
Allmänna lösningen är alltså $y = x + C_1\cos x + C_2\sin x$. Begynneslsevillkoren ger slutligen $C_1 = 0,\ 1+C_2 = 0$.

Svar : $\mathbf{y = x - \sin x.}$

---

4. Beräkna den volym som erhålls då området i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av $y = x^2$, $y = 0$ och $x = 2$, roterar kring

   (a) x-axeln,

   (b) y-axeln.

(a) Skivformlen ger: $V = \int_0^2 \pi(x^2)^2\,dx = \int_0^2 \pi x^4\,dx = \frac{32\pi}{5}$

Svar: $\dfrac{32\pi}{5}$

(b) Om vi använder cylindriska skal ser det ut så här:

$V = \int_0^2 2\pi x \cdot y\,dx = 2\pi \int_0^2 x^3\,dx = 8\pi$

Om vi istället vill använda skivformeln, får vi integrera i y-led. Integranden blir arean av en cirkelring med innerradien x och ytterradien 2:

$V = \int_0^4 (\pi 2^2 - \pi x^2)\,dy = \pi \int_0^4 (4 - y)\,dy = 8\pi$

Svar: 8π

---

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\sqrt{1+x^2} - (1-\cos x)}{(e^{x^2}-1)\sin^2 x}$$

Tabellen över Maclaurinutvecklingar säger (observera att $\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$):

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3)$. Med $t = x^2$ får vi $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)$.

$e^t = 1 + t + O(t^2)$. Med $t = x^2$ får vi $e^{x^2} = 1 + x^2 + O(x^4)$.

Vi uttrycker nu vårt bråk med hjälp av dessa utvecklingar och Maclaurinutvecklingarna av $\sin x$ och $\cos x$:

$$\frac{\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - (1-\cos x)}{(e^{x^2}-1)\sin^2 x} = \frac{\frac{1}{2}(x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6)) - (1 - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)))}{(1 + x^2 + O(x^4) - 1)(x + O(x^3))^2} =$$

$$= \frac{-\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)}{(x^2 + O(x^4))(x^2 + O(x^4))} = \frac{-\frac{5x^4}{4} + O(x^6)}{x^4 + O(x^6)} = \frac{-\frac{5}{4} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \to -\frac{5}{24} \quad \text{då} \quad x \to 0$$

Svar: $-\frac{5}{24}$

---

6. För vilka x är

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}x^n}{3^{n-1}}$$

konvergent och vad blir summan för dessa x?

Serien kan skrivas (om vi bryter ut $\frac{2^3x^2}{3}$):

$$\frac{8x^2}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2x}{3}\right)^{n-2} = \frac{8x^2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x}{3}\right)^{n}$$

Nu ser vi att vi har en geometrisk serie med kvoten $\frac{2x}{3}$ (detta kan förstås också upptäckas genom att man skriver ut några av de första termerna), då vet vi att den konvergerar om och endast om $\left|\frac{2x}{3}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x| < \frac{3}{2}$ med summan $\frac{1}{1-\frac{2x}{3}}$. Vi multiplicerar slutligen in faktorn $\frac{8x^2}{3}$ och får:

Svar: Konvergent för $|x| < \frac{3}{2}$ med summan $\frac{8x^2}{3-2x}$

---

7. Antag att $y(x)$ löser begynnelsevärdesproblemet $y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = 0$. Vad är

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^3}\ ?$$

Vi försöker approximera lösningen med sitt Maclaurinpolynom av grad 3:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + O(x^4)$$

Insättning av $x = 0$ i ekvationen ger att $y'(0) = 0$. Derivering ger $y'' = 2x + 2yy'$, så speciellt är $y''(0) = 0$. Ytterligare en derivering ger $y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy''$. Alltså är $y'''(0) = 2$. Taylors formel ger nu att $y(x) = \frac{2x^3}{3!} + O(x^4) = \frac{x^3}{3} + O(x^4)$. Alltså är $\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^3} = \frac{1}{3}$.

Svar: $\frac{1}{3}$

---

8. (a) Formulera och bevis Integralkalkylens huvudsats.

   (b) Visa att om serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent så gäller att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Se läroboken, avsnitt 5.5 sats 5 och 9.2 sats 4!
