

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, TMV136

2009 12 17 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.

Telefon: Richard Lärkäng, 0703-088304

För godkänt krävs minst 21 poäng. Betyg 3: 21-30 poäng, betyg 4: 31-40 poäng, betyg 5: 41- ...

Bonuspoäng från hösten 2009 ingår. Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida :
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv136/0809/

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

OBS: 20/12 besvarad kursenkät ger 1 bonuspoäng.

1. (a) Beräkna $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$, (4p)

(b) Beräkna $\int_0^{\pi/4} \frac{(1 + \cos x) \sin x}{\cos x} \, dx$. (4p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = xy$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 2$. (6p)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet
 $y'' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$. (6p)

4. Beräkna den volym som erhålls då området i \mathbb{R}^2 som begränsas av $y = x^2$, $y = 0$ och $x = 2$, roteras kring

(a) x -axeln, (4p)

(b) y -axeln. (4p)

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+x^2} - (1 - \cos x)}{(e^{x^2} - 1) \sin^2 x}$$

(6p)

6. För vilka x är

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^n}{3^{n-1}}$$

konvergent och vad blir summan för dessa x ? (5p)

7. Antag att $y(x)$ löser begynnelsevärdesproblemet $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0$. Vad är (5p)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x^3} ?$$

8. (a) Formulera och bevisa Integralkalkylens huvudsats. (4p)

(b) Visa att om serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent så gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (2p)

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$