Matematisk Analys i en variabel E TMV136

100409

1 a) $\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\,dx = \left[\begin{matrix} t=\sqrt{x} & 0\to 0 \\ dx = 2t\,dt, & \pi^2/4 \to \pi/2\end{matrix}\right] = \int_0^{\pi/2} (\sin t)\, 2t\,dt = 2\int_0^{\pi/2} t\sin t\,dt = [PI] = 2\left([t(-\cos t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos t\,dt\right) = 2[\sin t]_0^{\pi/2} = 2$

b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+2)} = \int_1^\infty \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}\,dx = \int_1^\infty \frac{1/2}{x} + \frac{-1/2}{x+2}\,dx = \frac12\left[\ln|x| - \ln|x+2|\right]_1^\infty = \frac12\left(\lim_{x\to\infty} \ln|x| - \ln|x+2| - (\ln 1 - \ln 3)\right) = \frac12\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x}{x+2} + \ln 3\right) = \frac12\left(\ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+2}\right) + \ln 3\right) = \frac12(\ln 1 + \ln 3) = \frac12 \ln 3$

2) $\frac{dy}{dx} = y' = x\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = x\,dx$ om $\sqrt{1-y^2}\neq 0 \Rightarrow \int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int x\,dx$ eller $y^2=1 \Rightarrow$ $\arcsin y = \frac{x^2}{2}+C$ eller $y\equiv\pm1$. Villkoret $y(0)=-1 \Rightarrow y\equiv -1$ eller $\arcsin y = \frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{2}$ som ger $y=\sin\left(\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$ eller $y\equiv -1$

3) $y = y_h + y_p$. Kar. ekv: $0=r^2+4r+3=(r+1)(r+3) \Rightarrow y_h = C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$. Ansätt $y_p = x^r(Ae^{-x}) = \left(\begin{matrix} r=1 \text{ ty} \\ \text{annars del i } y_h\end{matrix}\right) = Axe^{-x} \Rightarrow y_p' = Ae^{-x} - Axe^{-x} = Ae^{-x} - y_p \Rightarrow y_p'' = -Ae^{-x} - y_p' = -Ae^{-x} - (Ae^{-x} - y_p) = -2Ae^{-x} + Axe^{-x}$ ∴ $2e^{-x} = y_p''+4y_p'+3y_p = -2Ae^{-x} + Axe^{-x} + 4(Ae^{-x} - Axe^{-x}) + 3Axe^{-x} = \dots = 2Ae^{-x}$
∴ $2A = 2 \Rightarrow A=1$ ∴ $y = C_1e^{-x}+C_2e^{-3x} + xe^{-x}$ och $y' = -C_1e^{-x} - 3C_2e^{-3x} + e^{-x} - xe^{-x}$ ∴ $\begin{cases} C_1+C_2=0\\ -C_1-3C_2+1=0\end{cases}$
$\Rightarrow C_1 = -C_2 = -\frac12$ ∴ $y = -\frac12 e^{-x} + \frac12 e^{-3x} + xe^{-x} = (x-\frac12)e^{-x}+\frac12 e^{-3x}$

4) $Vol = \int_0^{\sqrt\pi} 2\pi x\sin x^2\,dx = \pi\left[-\cos x^2\right]_0^{\sqrt\pi} = -\pi(\cos\pi - \cos 0) = -\pi(-1-1) = 2\pi$

5) $L = \int_0^{4\pi}\sqrt{(-\sin t + (\sin t + t\cos t))^2 + (\cos t - (\cos t + t(-\sin t)))^2}\,dt = \int_0^{4\pi}\sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\,dt = \int_0^{4\pi}|t|\,dt = \int_0^{4\pi} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{4\pi} = 8\pi^2$

6) $\lim_{x\to0}\frac{2x\arctan x - x\sin(2x)}{(e^{x^2}-1)(1-\cos x)} = \lim_{x\to0} \frac{2x\left(x-\frac{x^3}{3}+O(x^5)\right) - x\left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + O(x^5)\right)}{(x^2+O(x^4))\left(\frac{x^2}{2}+O(x^4)\right)} =$

$= \lim_{x\to0}\frac{x^4\left(\left(\frac43-\frac23\right)+O(x^2)\right)}{x^4(1+O(x^2))\left(\frac12+O(x^2)\right)} = \lim_{x\to0}\frac{\frac23+O(x^2)}{\frac12+O(x^2)} = \frac{2/3}{1/2} = \frac43$

7) a) Då $0 \le \frac{n!}{(n+2)!+1} \le \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \le \frac{1}{n^2}$ och $\sum\frac{1}{n^2}$ konvergent så gäller enligt Jämförelsekriteriet för positiva serier att $\sum\frac{n!}{(n+2)!+1}$ konv.

b) Låt $x_0>10$ vara sådant att $\frac{\ln x}{x}<\frac12$ för $x>x_0$. Då gäller

$\frac{1}{\sqrt{x^2+x\ln x}} = \frac{1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\ln x}{x}}} = \frac{1}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\ln x}{x}}} = \frac1x\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\ln x}{x}}} > \frac1x\frac{1}{\sqrt{3/2}} = \frac{\sqrt2}{\sqrt3}\frac1x$

för $x>x_0$ ∴ $\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^2+x\ln x}} = \int_1^{x_0} + \int_{x_0}^\infty \cdots dx$ och $\int_{x_0}^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^2+x\ln x}} > \frac{\sqrt2}{\sqrt3}\int_{x_0}^\infty\frac1x\,dx$ som är divergent ∴ enligt Jämförelsekriteriet för integraler att $\int_{x_0}^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^2+x\ln x}}$ är divergent. Då är ju också $\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^2+x\ln x}}$ divergent.

8) Se kursboken