Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E, TMV136

2010 04 09 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.
Telefon: Fredrik Lindgren, 0703-088304
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Bonuspoäng från hösten 2009 ingår.
Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida:
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve016/0910/
Skriv program och inskrivningsår på omslaget; skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. (a) Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\,dx$ (4p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+2)}$ om den konvergerar. Motivera annars att den är divergent. (4p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = x\sqrt{1-y^2}$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = -1$. (6p)

3. Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 3y = 2e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$ (6p)

4. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området som defineras av olikheterna $0 \le y \le \sin x^2$ och $0 \le x \le \sqrt{\pi}$ roteras kring y-axeln. (6p)

5. Beräkna längden av kurvan

$$\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 4\pi.$$ (6p)

6. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x\arctan x - x\sin 2x}{(e^{x^2}-1)(1-\cos x)}.$ (6p)

7. Undersök om

   (a) serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!+1}$ är konvergent eller divergent

   (b) integralen $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x\ln x}}$ är konvergent eller divergent. (3p+3p)

8. (a) Vad menas med en *delsumma* av en serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
   och vad menas med *summan* av en serie som är konvergent. (2p)

   (b) Vad säger satsen om alternerande seriers konvergens? (”Alternating Series Test”) (2p)

   (c) Bevisa att om serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent, så är $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$ (2p)

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$