Matematisk analys i en variabel E, TMV136, 2010-08-27

---

1. (a) Använd variabelsubstitution: $\int_0^1 \frac{2x}{x^4+1}\,dx = \{t = x^2,\ dt = 2x\,dx,\ 0^2 = 0,\ 1^2 = 1\} = \int_0^1 (\frac{1}{t^2+1})\,dt = \Big[\arctan t\Big]_0^1 = \arctan 1 - 0 = \pi/4$. **Svar:** $\pi/4$

   (b) Använd partiell integration - ta primitiv funktion till x och derivera i andra steget $\ln x^2$: $\int_1^2 x\ln x^2\,dx =$
   $\Big[\frac{1}{2}x^2\ln x^2\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\frac{2x}{x^2}\,dx = 2\ln 4 - 0 - \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2 = 4\ln 2 - \frac{3}{2}$ **Svar:** $4\ln 2 - 3/2$

2. Ekvationen är linjär med den integrerande faktorn $e^{\int(-1/x)\,dx} = e^{-\ln x} = 1/x$. Vi multiplicerar båda leden med denna och får $y'/x - y/x^2 = -e^{-x} \quad\Leftrightarrow\quad (y/x)' = -e^{-x} \quad\Leftrightarrow\quad y/x = e^{-x} + C \quad\Leftrightarrow\quad y = xe^{-x} + Cx$. Villkoret $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ ger att $C = 0$. **Svar:** $y = xe^{-x}$

3. Vi bestämmer allmänna lösningen y_h till motsvarande homogena ekvation $y'' + 4y' + 3y = 0$ och därefter hittar vi **en** lösning y_p till den vi har. Alla lösningar till den senare kan då skrivas $y_h + y_p$. Karakteristiska ekvationen $r^2 + 4r + 3 = 0$ har rötterna $r = -1, -3$, varmed $y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$. Ansätt $y_p = Ae^x$, vi får då $y_p'' + 4y_p' + 3y_p = 8Ae^x$, varför $A = 3/8$ och $y_p = \frac{3}{8}e^x$. Allmänna lösningen är alltså $y = \frac{3}{8}e^x + C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$. **Svar:** $y = \frac{3}{8}e^x + C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$.

4. Tabellen över Maclaurinutvecklingar säger: $e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3)$. Med $t = x^2$ får vi $e^x = 1 + x^2 + x^4/2 + O(x^6)$. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)$. Vi multiplicerar och får $(1 + x^2 + x^4/2 + O(x^6))(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6))$. Detta betyder att $f^{(3)}(0) = 0$ och $f^{(4)}(0) = 1$. **Svar:** $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)),\ f^{(3)}(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 1$

5. Serien kan skrivas (om vi bryter ut $(\frac{2}{3})^3$):

$$\Big(\frac{2}{3}\Big)^3 \sum_{n=3}^{\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-3} = \Big(\frac{2}{3}\Big)^3 \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n}$$

   Nu ser vi att vi har en geometrisk serie med kvoten $\frac{2}{3}$ (detta kan förstås också upptäckas genom att man skriver ut några av de första termerna), då vet vi att summan är $\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$. Vi multiplicerar slutligen in faktorn $(\frac{2}{3})^3$ och får: **Svar:** $\frac{8}{9}$

6. (a) Vi använder skivformlen. Radien av skivan för given x-koordinat är $\cos x - (-1) = 1 + \cos x$. Volumen blir $V = \pi\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x)^2\,dx = \pi\int_{-\pi}^{\pi} 1 + 2\cos x + \cos^2 x\,dx$. Med $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ får vi $V = \pi\int_{-\pi}^{\pi}\frac{3}{2} + 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\,dx = \pi\Big[\frac{3}{2}x + 2\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi\Big(\frac{3}{2}\pi - (-\frac{3}{2}\pi)\Big) = 3\pi^2$. **Svar:** $3\pi^2$

   (b) Vi använder cylindriska skal. Radien av cylindern är nu $\pi + x$.
   Så $V = 2\pi\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)(1 + \cos x)\,dx$.
   Svar: $2\pi\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)(1 + \cos x)\,dx$

7. (a) Jästmängden y ges av diffekvationen

$$y' = 0,2y - a\ .$$

   Detta är en linjär differential ekvation. Lösningen till den homogena ekvationen $y' = 0,2y$ är $y = Ce^{0,2t}$. En partikulär lösning till den ursprungliga ekvationen kan hittas med variation av parametrar, men det är lätt att se att $y = 5a$ är en lösning. Den allmänna lösningen är $y = Ce^{0,2t} + 5a$. Begynnelsevillkoret för $t = 0$ ger att $y_0 = C + 5a$, så $C = y_0 - 5a$. **Svar:** $y = (y_0 - 5a)e^{0,2t} + 5a$

   (b) Mängden jäst i behållaren hålls konstant om $y_0 - 5a = 0$, så $a = y_0/5$. **Svar:** $a = y_0/5$

8. (a) En serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar om följden (s_N) av partialsummor $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ har ett gränsvärde.

   (b) Serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ har föjlden $-1, 0, -1, 0, \ldots$ som följd av partialsummor. Följden saknar gränsvärde. **Svar: Nej**

   (c) Följden av partialsummor s_N för en serie med positiva termer är växande. Antingen har den ett (ändligt) gränsvärde eller $s_N \to \infty$, då $N \to \infty$. Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, så har följden ett ändligt gränsvärde och serien konvergerar.