Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, TMV136

2010 08 27 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.
Telefon: Fredrik Lindgren, 0703-088304
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Bonuspoäng från hösten 2009 ingår.
Lösningar samt uppgifter om granskning av rättade tentor kommer på kursens hemsida:
http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv136/0910/
Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. Beräkna integralerna

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^4+1}\,dx$ (4p)

   (b) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x^2\,dx$ (4p)

2. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y' - \dfrac{1}{x}y = -xe^{-x}$.
   Ange också den lösning som uppfyller $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$. (6p)

3. Lös differentialekvationen $y'' + 4y' + 3y = 3e^x$ (4p)

4. Bestäm Maclaurinutvecklingen med termer upp till och med ordning 4 för funktionen $f(x) = e^{x^2}\cos x$. Beräkna sedan derivatorna $f^{(3)}(0)$ och $f^{(4)}(0)$. (6p)

5. Beräkna $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (4p)

6. (a) Låt kurvan $y = \cos x,\ -\pi \le x \le \pi$, rotera kring linjen $y = -1$.
   Beräkna volymen av den kropp som bildas. (6p)

   (b) Området som begränsas av kurvan i (a) och linjen $y = -1$ roterar istället kring linjen $x = -\pi$. Skriv upp (men beräkna inte!) en integral som uttrycker volymen av den uppkomna rotationskroppen. (2p)

7. Vid odling av en jästkultur är tillväxthastigheten proportionell mot mängden jäst.
   En sådan odling görs i en behållare från vilken man tappar ut a kg jäst per minut.

   (a) Antag att mängden jäst från början är y_0 kg och att proportionalitetskonstanten är 0,2. Bestäm mängden jäst som funktion av tiden (minuter). (6p)

   (b) Går det att välja a så att mängden jäst i behållaren hålls konstant? Hur ska man i så fall välja? (2p)

8. (a) Definiera begreppet *konvergens* för en serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (2p)

   (b) Är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ konvergent? Motivera ditt svar. (2p)

   (c) Förklara varför man för serier med positiva termer ofta skriver $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ för att ange konvergens. (2p)

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$