Matematisk Analys i en variabel, B, TMV136 — 101215

1) a) $\int_1^{\sqrt{2}} x(1+x^2)^3 dx = \left[\begin{matrix} t=1+x^2 & dx = \frac{1}{2x}dt \\ 1\to 2, & \sqrt{2}\to 3\end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\int_2^3 t^3 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_2^3 = \frac{1}{8}(81-16) = \frac{65}{8}$ b) $\int x\sin^2 x\,dx = \int x\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx =$

$= \frac{1}{2}\int x - x\cos 2x\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx = [PI] = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx\right) = \frac{x^2 - x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C$

c) $\frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{x(x+1)} = [PB] = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = [HP] = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow \int \frac{1}{x+x^2}dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$

2) Vi ser att $y\equiv 1$ och $y \equiv -1$ är lösningar som ej uppfyller $y(0)=2$. Sök lösning uppfyller alltså $\frac{1}{y^2-1}\frac{dy}{dx} = x^2$ som är separabel så att $\int \frac{1/2}{y-1} - \frac{1/2}{y+1}\,dy = \int x^2 dx \Rightarrow \frac{1}{2}(\ln|y-1| - \ln|y+1|) = \frac{x^3}{3} + C$

där $C \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{2x^3}{3} + C \Rightarrow \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{\frac{2}{3}x^3 + C} = Ce^{\frac{2}{3}x^3},\ C>0 \Rightarrow \frac{y-1}{y+1} = \pm Ce^{\frac{2}{3}x^3} = Ce^{\frac{2}{3}x^3}$

där $C \neq 0$. BV $y(0)=2 \Rightarrow C = 1/3$ $\therefore$ $\frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}x^3} \Rightarrow y = \frac{3+e^{\frac{2}{3}x^3}}{3-e^{\frac{2}{3}x^3}}$

3) $y'' - 4y' + 3y = 2e^x$, $y(0) = y'(0) = 0$. Linjär $\Rightarrow y = y_p + y_h$. För y_h kan eker.

$0 = r^2 - 4r + 3 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 3 \Rightarrow y_h = C_1e^x + C_2e^{3x}$. Ansätt $y_p = Cx^m e^x$, $m=1 \Rightarrow$

$y_p = Cxe^x$, $y_p' = Ce^x + Cxe^x = Ce^x + y_p \Rightarrow y_p'' = Ce^x + y_p' = 2Ce^x + y_p$

Insättning ger $2e^x = y_p'' - 4y_p' + 3y_p = 2Ce^x + y_p - 4(Ce^x + y_p) + 3y_p = -2Ce^x \Rightarrow C = -1$

$\therefore y = y_p + y_h = -xe^x + C_1e^x + C_2e^{3x}$ BV $\Rightarrow 0 = y(0) = C_1 + C_2$, $0 = y'(0) = -1 + C_1 + 3C_2 \Rightarrow$

$y = -xe^x - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{3x}$

4) Volym $= \int_0^1 \pi(\sqrt{x}e^x)^2 dx = \pi\int_0^1 xe^{2x}dx = [PI] =$

$= \pi\left(\left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}dx\right) = \pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1\right) = \pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2-1)\right) = \frac{\pi}{4}(e^2+1)$

5) $1-\cos x = \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$, $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)$, $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)$, $x\arctan x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)$

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x\arctan x}{(1-\cos x)(e^x-1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6) + \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)}{\left(\frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\right)\left(\frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{6} + \mathcal{O}(x^6)}{\frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)\right)}{x^4\left(\frac{1}{4} + \mathcal{O}(x^2)\right)}$

$= \frac{-\frac{1}{6}+0}{\frac{1}{4}+0} = -\frac{2}{3}$

6) $I = \int e^{ax}\sin bx\,dx = [PI] = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx = [PI] =$

$= \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin(bx)dx\right) = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}I \Rightarrow$

$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)I = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2}e^{ax} \Rightarrow I = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$

7) a) Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent om gränsvärdet $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n$ existerar och är ändligt. Detta gränsvärde kallas då seriens summa och betecknas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. En icke konvergent serie sägs vara divergent. Serien $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ är konvergent och serien $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ är divergent.

b) Se kursboken

8) $F'(x) = \left(1/1+(x^2-2x)^4\right)(2x-2) = 0 \Leftrightarrow x=1$ så att

då $F'>0$ för $x>1$ och $F'<0$ för $x<1$

x		1	
F'	$-$	0	$+$
F	$\searrow$	$F(1)$	$\nearrow$

Så gäller att något maximivärde ej antas och alltså finns ingen maximipunkt; punkten $x=1$ är en minimipunkt.