Matematisk analys i en variabel E, TMV136, 2011-08-26

---

1. **(a) Använd variabelsubstitution:** $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ = **(inre derivata)** $= \{t = x^2+1,\ dt = 2x\,dx,\ 0^2+1 = 1,\ 1^2+1 = 2\} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\Big[\ln t\Big]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$. **(b) Använd partialintegration:** $\int x\cos^2 x\,dx = \int x(\frac{1+\cos(2x)}{2})\,dx = \frac{1}{2}(\int x\,dx + \int x\cos(2x)\,dx) =$ **[PI]** $= \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} + \frac{x\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2}\,dx) = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin(2x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{8} + C$.
   (c) Använd partialintegration (åt 'fel' håll): $\int x\arctan x\,dx =$ **[PI]** $= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C$.

2. **Integrerande faktor:** e^x **ger** $\frac{d}{dx}(e^x y) = e^x \Rightarrow e^x y = \int e^x\,dx = e^x + C \Rightarrow y = 1 + Ce^{-x}$ **och** $y(0) = 0$ **ger** $C = 0$ **och därmed** $y = 1$.

3. **Kar. ekv.** $r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow r = -1, 2 \Rightarrow y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ **Ansätt** $y_p = Cx^ke^{-x}$ **där** $k = 0, 1$ **eller** 2 **ska väljas. Då** $e^{-x} \in y_h$ **men** $xe^{-x} \notin y_h$ **så väljer vi** $k = 1$ **så att** $y_p = Cxe^{-x} \Rightarrow y_p' = Ce^{-x} - Cxe^{-x},\ y_p'' = -2Ce^{-x} + Cxe^{-x}$. **Insättning** $\Rightarrow -2Ce^{-x} + Cxe^{-x} - (Ce^{-x} - Cxe^{-x}) - 2Cxe^{-x} = -3Ce^{-x} \Rightarrow C = -1 \Rightarrow y = y_p + y_h = C_1e^{-x} + C_2xe^{2x} - xe^{-x}$. **Begynnelsevillkor** $y(0) = y'(0) = 0$ **ger** $C_1 = -1/3,\ C_2 = 1/3$ **så att** $y = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}xe^{2x} - xe^{-x}$.

4. $L = \int_0^1 \sqrt{(6t)^2 + (6t^2)^2}\,dt = 6\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt =$ **(inre derivata)** $= 3[\frac{2}{3}(1+t^2)^{3/2}]_0^1 = 2(2^{3/2} - 1) = 2(2\sqrt{2} - 1)$.

5. $V = \int_0^1 \pi(e^{2x})^2\,dx = \pi\int_0^1 e^{4x}\,dx = \frac{\pi}{4}[e^{4x}]_0^1 = \frac{\pi}{4}(e^4 - 1)$.

6. **Maclaurinutvecklin ger** $\sin(x^2) - x\ln(1+x) = x^2 + \mathcal{O}(x^6) - x(x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)) = \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^4)$ **så att**
$$\frac{\sin(x^2) - x\ln(1+x)}{\sin x(\frac{\cos x - 1}{\cos x})} = \frac{\cos x(\sin(x^2) - x\ln(1+x))}{\sin x(\cos x - 1)} = \frac{\cos x(\frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^4))}{(x + \mathcal{O}(x^3))(-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4))}$$
$$= \frac{\cancel{x}^3\cos x(\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x))}{\cancel{x}\cdot\cancel{x}^2(1 + \mathcal{O}(x^2))(-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x^2))} \to \frac{1\cdot(\frac{1}{2} + 0)}{(1+0)(-\frac{1}{2} + 0)} = \frac{1/2}{-1/2} = -1 \text{ **då** } x \to 0.$$

7. **Integranden** $\frac{1}{(x+1)^2}$ **är ej begränsad på intervallet utan har en singularitet i** $x = -1$. **Alltså gäller att** $I \equiv \int_{-2}^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \int_{-1}^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$ **där båda integralerna är generaliserade. Vi har** $\int_{-1}^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \equiv \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{-1+\varepsilon}^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}[-\frac{1}{1+x}]_{-1+\varepsilon}^2$ **och detta gränsvärde existerar ej ändligt så interalen är divergent** $\Rightarrow$ I **divergent.**

8. **(a) En serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergerar om följden** (s_N) **av partialsummor** $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ **har ett gränsvärde då** $N \to \infty$.

   (b) Serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ **har föjlden** $-1, 0, -1, 0, \ldots$ **som följd av partialsummor. Följden saknar gränsvärde.** **Svar: Nej**

   (c) Följden av partialsummor s_N **för en serie med positiva termer är växande. Antingen har den ett (ändligt) gränsvärde eller** $s_N \to \infty$, **då** $N \to \infty$. **Om** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, **så har följden ett ändligt gränsvärde och serien konvergerar.**