

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, TMV136

2011 08 26 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.

Telefon: Adam Wojciechowski, 0703-088304

För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng. Bonuspoäng från hösten 2010 ingår.

Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida :

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv136/1011/

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

1. Beräkna följande integraler

$$(a) \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx, \quad (b) \int x \cos^2 x dx, \quad (c) \int x \arctan x dx \quad (9p)$$

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = -y + 1$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. (5p)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$. (6p)

4. Beräkna längden av kurvan $x = 3t^2$, $y = 2t^3$, $0 \leq t \leq 1$. (6p)

5. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $0 \leq y \leq e^{2x}$ med $0 \leq x \leq 1$ roteras kring x -axeln. (6p)

6. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 - x \ln(1+x)}{\sin x - \tan x}. \quad (6p)$$

7. Kalkylen

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1} \right]_{-2}^2 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3} \quad (6p)$$

är uppenbarligen felaktig, eftersom integranden är positiv. Vad är felet?

Hur borde man ha behandlat integralen och vad blir resultatet?

8. a) Definiera begreppet *konvergens* för en serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (2p)

b) Är serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ konvergent? Motivera ditt svar. (2p)

c) Förklara varför man för serier med positiva termer ofta skriver $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ för att ange konvergens. (2p)

VA

vgv

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$