Lösningar till Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV136) 2011-12-14

1. **a)** $\int x\cos x^2\,dx = [t = x^2,\ dt = 2xdx] = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$, **b)** $\int_0^\pi x\cos x\,dx = [\text{PI}] = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = 0 - [-\cos x]_0^\pi = -2$, **c)** $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = [\text{PI}] = x\tan x - \int \tan x\,dx = x\tan x - \int \frac{1}{\cos x}\sin x\,dx = x\tan x + \ln|\cos x| + C$

2. Linjär, första ordningen. IF: $e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$ som ger att ekvationen är ekvivalent med $\frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = xe^{x^2}$. Integration ger $e^{x^2}y = \int \frac{d}{dx}(e^{x^2}y)\,dx = \int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$ som ger att $y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$. Insättning av begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger att $C = \frac{1}{2}$ och alltså $y = \frac{1}{2}(1 + e^{-x^2})$.

3. Linjariteten ger att $y = y_p + y_h$. Kar. ekv. är $r^2 + 2r + 2 = 0$ med rötter $r_{1,2} = -1 \pm i$. Detta ger $y_h = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$. Ansätt $y_p = x^mCe^{-x}$ där vi kan ta $m = 0$. Alltså är $y_p' = -Ce^{-x}$ och $y_p'' = Ce^{-x}$. Insättning i ekv. ger $Ce^{-x} - 2Ce^{-x} + 2Ce^{-x} = e^{-x}$ så att $C = 1$ och alltså $y_p = e^{-x}$. Härav följer $y = y_p + y_h = e^{-x} + e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$.

4. Maclaurinutveckling ger $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \mathcal{O}(t^5)$ och $\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + \mathcal{O}(t^5)$. Alltså fås $3\arctan x - \arctan(3x) = 3(x - \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5)) - (3x - \frac{1}{3}(3x)^3 + \mathcal{O}(x^5)) = -x^3 + \mathcal{O}(x^5) + 9x^3 + \mathcal{O}(x^5) = 8x^3 + \mathcal{O}(x^5)$. Vidare har vi $3\sin x - \sin(3x) = 3(x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5)) - (3x - \frac{1}{3!}(3x)^3 + \mathcal{O}(x^5)) = -\frac{1}{2}x^3 + \mathcal{O}(x^5) + \frac{3^3}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5) = (\frac{9}{2} - \frac{1}{2})x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ Vi får då $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x - \sin(3x)}{3\arctan x - \arctan(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^3}((\frac{9-1}{2}) + \mathcal{O}(x^2))}{\cancel{x^3}(8 + \mathcal{O}(x^2))} = \frac{\frac{1}{2} + 0}{1 + 0} = \frac{1}{2}$

5. $\frac{x^3}{x^3+1} =$ [utför divisionsalgoritmen eller, enklare, skriv $x^3 = x^3 + 1 - 1$ och dividera] $= 1 - \frac{1}{x^3+1} =$ [$x^3 + 1$ har nollställe -1 och använd faktorsatsen] $= 1 - \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = [\text{PB}] = 1 - (\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}) = 1 - (\frac{1/3}{x+1} + \frac{(-1/3)x+2/3}{x^2-x+1})$. Vi får nu $I \equiv \int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx = \int 1 - (\frac{1/3}{x+1} + \frac{(-1/3)x+2/3}{x^2-x+1})\,dx = x - \tilde{I}$ och $\tilde{I} = \int \frac{1/3}{x+1}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$. Nu gäller $\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))^2 + 1}\,dx = [t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}),\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt] = \frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2})) + C$ Slutligen får vi alltså $I = x - \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2 - x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2})) + C$

6. (a) Låt $u_1 = y,\ u_2 = y' = u_1'$. Vi ser då att $u_2' = (y')' = y'' = x^2y' - y + g(x) = x^2u_2 - u_1 + g(x)$ och med $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ får vi $u' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ x^2u_2 - u_1 + g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + u_2 \\ -u_1 + x^2u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} = AX + G(x)$ där $A = A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x^2 \end{pmatrix}$ och $G(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$.

   (b) Euler framåt för $u' = f(x,u)$ ges av $u_{n+1} = u_n + kf(x_n, u_n)$ där k är steglängden $x_{n+1} - x_n$. I vårt fall är $f(x,u) = A(x)u$ så Euler framåt blir $u_{n+1} = u_n + kA(x_n)u_n$

7. Se kursboken; Sats 5.5, sid. 311.

8. Arean till rotationsytan är $\int_1^\infty y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$ och $x'(t) = \left(\sin\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\ln t + \left(2 + \cos\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t}$, $y'(t) = -\frac{1}{2t^{3/2}}\left(2 + \sin\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\cos\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}$. Detta ger som integrand

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\left(2 + \sin\frac{1}{t}\right)\sqrt{\left(\left(\sin\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\ln t + \left(2 + \cos\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2t^{3/2}}\left(2 + \sin\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\cos\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\right)^2}$$

. Vi vill jämföra med en integral $\int_1^\infty \frac{1}{t^p}\,dt$, som ju är konvergent för $p > 1$ och divergent annars. Vi gör integranden större genom att uppskatta alla sin och cos med 1 och ser att integranden uppskattas av $\frac{3}{\sqrt{t}}\sqrt{\left(\frac{1}{t^2}\ln t + \frac{3}{t}\right)^2 + \left(\frac{3}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^{5/2}}\right)^2}$. Sen använder vi $\ln t < t$ och $\frac{1}{t^{5/2}} \le \frac{1}{t^{3/2}}$ och får integranden uppskattad med $\frac{3}{\sqrt{t}}\sqrt{\frac{16}{t^2} + \frac{25}{4t^3}}$. Slutligen uppskattar vi $\frac{25}{4t^3}$ med $\frac{9}{t^2}$, där konstanterna är valda för att göra räkningen lättare. Integralen vi söker är mindre än $\int_1^\infty \frac{15}{t^{3/2}}\,dt$ och är därmed konvergent så arean är ändlig.