Lösningar till Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV136) 2012-04-13

1. **a)** $\int xe^{x^2}\,dx = [t = x^2,\ dt = 2xdx] = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$, **b)** $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos}\sin x\,dx = [t = \cos x,\ -dt = \sin x dx,\ 0 \to 1,\ \pi/4 \to 1/\sqrt{2}] = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_{1/\sqrt{2}}^{1} = \frac{1}{2}\ln 2$, **c)** $\int \cos\sqrt{x}\,dx = [t = \sqrt{x},\ x = t^2,\ dx = 2tdt] = \int 2t\cos t\,dt = [\text{PI}] = 2(t\sin t - \int 1\cdot\sin t\,dt) = 2t\sin t - 2(-\cos t) + C = 2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + C$

2. Linjariteten ger att $y = y_p + y_h$. Kar. ekv. är $0 = r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r-3)$. Detta ger $y_h = C_1e^x + C_2e^{3x}$. Ansätt $y_p = x^mCe^{3x} = (m = 1) = Cxe^{3x}$. Alltså är $y_p' = 3Cxe^{3x} + Ce^{3x}$ och $y_p'' = (9x+6)Ce^{3x}$. Insättning i ekv. ger $2e^{3x} = (9x+6)Ce^{3x} - 4(3Cxe^{3x} + Ce^{3x}) + 3Cxe^{3x} = 3Ce^{3x}(9x+6-4-9x) = 2Ce^{3x}$ vilket ger $C = 1$ och $y_p = xe^{3x}$. Härav följer $y = y_p + y_h = xe^{3x} + C_1e^x + C_2e^{3x}$. Derivering och insättning av begynnelsevärdena ger $C_1 + C_2 = 0$ och $C_1 + 3C_2 + 1 = 0$ som ger $C_1 = 1/2 = -C_2$. Alltså är sökt lösning $y = xe^{3x} + (1/2)e^x - (1/2)e^{3x}$.

3. Maclaurinutveckling ger $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \mathcal{O}(t^5)$. Alltså fås $\sin^2 x = (x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5))^2 = x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \mathcal{O}(x^6) - \frac{1}{3!}x^4 + \mathcal{O}(x^6) = x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$. Vidare gäller $\sin x^2 = x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \mathcal{O}(x^{10}) = x^2 + \mathcal{O}(x^6)$. Vi får då $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - \sin x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + \mathcal{O}(x^6) - (x^2 + \mathcal{O}(x^6))}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^4}(-\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2))}{\cancel{x^4}} = \frac{-\frac{1}{3} + 0}{1} = -\frac{1}{3}$.

4. Separabel, första ordningen som ger att om $y \not\equiv \pm 1$ så har vi $\frac{dy}{1-y^2} = dx$. Vi ser vidare att både $y \equiv 1$ och $y \equiv -1$ är lösningar till ursprungliga ekvationen; potentiellt singulära lösningar. Integration efter separering ger $-\int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\,dy = \int dx = x + C_1$ där C_1 är ett godtyckligt reellt tal. Partialbråksuppdelning ger $\int \frac{1/2}{y-1} - \frac{1/2}{y+1}\,dy = -x - C_1 \Rightarrow \ln|\frac{y-1}{y+1}| = -2x - C_1 \Rightarrow |\frac{y-1}{y+1}| = C_2e^{-2x}$, där $C_2 > 0 \Rightarrow \frac{y-1}{y+1} = Ce^{-2x}$, där $C \neq 0$. Detta ger att $y = \frac{1+Ce^{-2x}}{1-Ce^{-2x}}$ där C är godtyckligt reellt tal, ty $C = 0$ ger ju (den potentiellt singulära) lösningen $y \equiv 1$. Vidare är alltså $y \equiv -1$ en singulär lösning. Detta ger alltså alla lösningarna och begynnelsevillkoren i a) och b) uppfylls alltså av den allmänna lösningen med $C = 0$ respektive den singulära lösningen.

5. Längden av kurvan ges av L$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1 + (\frac{-2x}{1-x^2})^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(1-x^2)^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1 + x^4 + 2x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}|\frac{1+x^2}{1-x^2}|\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{1-x^2} - 1\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\,dx - \frac{1}{2} = \big[\ln|\frac{1+x}{1-x}|\big]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \ln 3 - \frac{1}{2}$.

6. a) Volym vid rotation runt x-axeln är: $\int_0^2 \pi(x^3)^2\,dx = \pi[x^7/7]_0^2 = 2^7\pi/7$.

   b) Volym vid rotation runt y-axeln är: $\int_0^2 2\pi x(x^3)\,dx = 2\pi[x^5/5]_0^2 = 2^6\pi/5$.

7. $I \equiv \int\sqrt{x^2+1}\,dx = [\text{PI}] = x\sqrt{x^2+1} - \int x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}2x\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int\sqrt{x^2+1}\,dx + \int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - I + \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$. 'Bootstrapping' ger nu $I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C$

   Alternativt:
   $\int\sqrt{x^2+1}\,dx = [x = \tan\theta,\ dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta},\ \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\cos\theta}] = \int\frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \int\frac{\cos\theta d\theta}{\cos^4\theta} = \int\frac{\cos\theta d\theta}{(1-\sin^2\theta)^2} = [t = \sin\theta,\ dt = \cos\theta d\theta] = \int\frac{dt}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4}[\int\frac{dt}{1-t} + \int\frac{dt}{(1-t)^2} + \int\frac{dt}{1+t} + \int\frac{dt}{(1+t)^2}] = \frac{1}{4}[-\ln|1-t| + \frac{1}{1-t} + \ln|1+t| - \frac{1}{1+t}] + C = \frac{1}{4}\ln|\frac{1+t}{1-t}| + \frac{1}{2}\frac{t}{1-t^2} + C = \frac{1}{4}\ln|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}| + \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{1-\sin^2\theta} + C = \frac{1}{4}\ln|\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}| + \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + C = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}| + \frac{1}{2}\frac{\tan\theta}{\cos\theta} + C = \frac{1}{2}\ln|\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta| + \frac{1}{2}\frac{\tan\theta}{\cos\theta} + C = \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2+1} + x| + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + C$.

8. Låt y_1 och y_2 vara lösningar till $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ och $\alpha_1,\ \alpha_2$ vara reella tal. Då är också $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2$ en lösning. Bevis: $a_2(x)(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2)'' + a_1(x)(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2)' + a_0(x)(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) = a_2(x)(\alpha_1y_1'' + \alpha_2y_2'') + a_1(x)(\alpha_1y_1' + \alpha_2y_2') + a_0(x)(\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) = \alpha_1(a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1) + \alpha_2(a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2) = \alpha_1\cdot 0 + \alpha_2\cdot 0 = 0$.