TMV137, Matematisk analys i en variabel för E, 121219

1 a) $\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \{PB\} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1} = \{HP\} = \frac{-1}{x}+\frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x+1}$ ∴ $\int \frac{1}{x^3-x}\,dx = \int -\frac{1}{x}+\frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x+1}\,dx =$
$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1|$ **b)** $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\arcsin t + C = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C$

c) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = 2\int_0^1 e^t\,t\,dt = [PI] = 2\left([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt\right) = 2(e - 0 - [e^t]_0^1) = 2(e-(e-1)) = 2$

2) $y' - \frac{2}{x}y = x^2$ IF: $e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$ ∴ $\frac{d}{dx}(x^{-2}y) = x^{-2}x^2 = x^0 = 1$ ∴ $x^{-2}y =$
$= \int \frac{d}{dx}(x^{-2}y)\,dx = \int 1\,dx = x + C \Rightarrow y = x^3 + Cx^2$

3) $y = y_p + y_h$. För y_h: kar. ekv. $0 = r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2) \Rightarrow y_h = C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$
För y_p: Ansätt $y_p = x^m(Ax+B)e^{-2x} = (m=1) = (Ax^2+Bx)e^{-2x}$, $y_p' =$
$= (-2Ax^2 + (2A-2B)x + B)e^{-2x}$, $y_p'' = (4Ax^2 - (4A + 4(A-B))x + 2(A-B) - 2B)e^{-2x}$ Insättning i ekv. $\Rightarrow A = 1$, $B = 2/3$ ∴ $y_p = (x^2 + \frac{2}{3}x)e^{-2x}$ och $y = (x^2+\frac{2}{3}x)e^{-2x} + C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$

4) a) $(r+3)(r-2) = r^2 + r - 6 \Rightarrow y'' + y' - 6y = 0$ har lösn. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$ och b)
$y'' + y' - 6y = -6x^2 + 2x + 2$ för $y = x^2$ så denna ekv har lösn. $y = x^2 + C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$

5) $\cos x - 1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4) - 1 = -\frac{x^2}{2!} + O(x^4)$ så $(\cos x - 1)^2 = \left(-\frac{x^2}{2!} + O(x^4)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + O(x^6)$
$\arctan(3x) = 3x + O(x^3)$, $\sin x - x = -\frac{x^3}{3!} + O(x^5)$ så $\arctan(3x)(\sin x - x) = -\frac{x^4}{2} + O(x^6)$
∴ $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(3x)(\sin x - x)}{(\cos x - 1)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{2} + O(x^6)}{\frac{x^4}{4} + O(x^6)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4(-\frac{1}{2} + O(x^2))}{x^4(\frac{1}{4} + O(x^2))} = \frac{-\frac{1}{2}+0}{\frac{1}{4}+0} = -2$

6) Tvärsnittet kan beskrivas med $(x-a)^2 + y^2 \le b^2$. Delen en rektangel med bredd dx och höjd $y \ge 0$ för en punkt (x,y) på tvärsnittets kant ger vid rotation runt y-axeln en volym $dV =$ omkretsen·arean $=$
$= 2\cdot 2\pi x \int_{a-b}^{a+b} x\sqrt{b^2-(x-a)^2}\,dx = 4\pi\int_{a-b}^{a+b} x|b|\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = \frac{x-a}{b} \\ dt = \frac{1}{b}dx \end{bmatrix} = 4\pi b^2\int_{-1}^{1}(a+bt)\sqrt{1-t^2}\,dt =$
$= \begin{pmatrix} t\sqrt{1-t^2} \text{ udda} \\ \text{på jämnt intervall} \end{pmatrix} = 8\pi b^2 a\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \begin{bmatrix} t = \sin\theta \\ dt = \cos\theta\,d\theta \end{bmatrix} = 8\pi ab^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta =$
$= \frac{8\pi ab^2}{2}\int_0^{\pi/2} 1 + \cos 2\theta\,d\theta = 4\pi ab^2\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2\pi^2 ab^2$ (Som ju också ses direkt med 'Guldins regel')

7) $y' = 3y^{2/3}$. Vi ser att $y = 0$ är en potentiell singulär lösning. Om $y \ne 0$ fås $\int \frac{1}{3}\frac{1}{y^{2/3}}\,dy = \int dx \Rightarrow y^{1/3} = x + C$, $C \in \mathbb{R} \Rightarrow y = (x+C)^3$ ∴ $y = \begin{cases} 0 & \text{singulär lösn.} \\ (x+C)^3 & \text{allmän lösn.} \end{cases}$

∴ Skarvning ger att $y = \begin{cases} (x+1)^3 & x \le -1 \\ 0 & -1 \le x \le 2 \\ (x-2)^3 & 2 \le x \end{cases}$ löser det givna problemet.

8) Se kursboken.