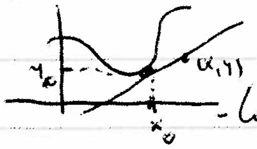
Lösn.förslag, TMV137, Matematisk Analys i en variabel, E, 131218

1a) $\int_0^{1/\sqrt{2}} x\cos(\pi x^2)\,dx = \left[\begin{matrix} t=\pi x^2 & 0\to 0 \\ \frac{dt}{dx}=2\pi x & 1/\sqrt{2}\to \frac{\pi}{2}\end{matrix}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt = \frac{1}{2\pi}[\sin t]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi}$

b) $\frac{x}{x^3+x^2} = \frac{1}{x(x+1)} = [PBU] = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = [HP] = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow \int_1^2 \frac{x}{x^3+x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx = \left[\ln|x| - \ln|x+1|\right]_1^2 = 2\ln 2 - \ln 3$

c) $\int \frac{1}{x\ln\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \left[\begin{matrix} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx\end{matrix}\right] = 2\int \frac{1}{t}\,dt = 2\ln|t| + C = 2\ln|\ln x| + C$

2) $y' = x + y \Leftrightarrow y' - y = x$ linjär IF: $e^{\int -1\,dx} = e^{-x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-x}y) = xe^{-x} \Rightarrow e^{-x}y = \int \frac{d}{dx}(e^{-x}y)\,dx =$
$= \int xe^{-x}\,dx = [PI] = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -(x+1) + Ce^{x}$

3) 

För tangenten till grafen för $y = y(x)$ i punkten $x = x_0$ gäller k = tangentens lutnings-koeff $= y'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$. Tag $x \equiv x_1 = x_0 + h$, h = steglängd

∴ $y_1 \equiv y = y_0 + (x_1 - x_0)y'(x_0) = y_0 + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y(x_0)) = y_0 + hf(x_0, y_0)$

∴ Pss får vi $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, $x_{i+1} = x_i + h$

4) $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3)$ så att $\ln(1+x^3) - x\arctan x = x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + O((x^2)^3) - x(x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)) =$
$= (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3})x^4 + O(x^6)$ Vidare är $(\cos x - 1)^2 = (-\frac{x^2}{2} + O(x^4))^2 = (-\frac{x^2}{2})^2 + (O(x^4))^2 + 2(-\frac{x^2}{2})O(x^4) = \frac{x^4}{4} + O(x^8) +$
$+ O(x^6) = \frac{x^4}{4} + O(x^6)$ ∴ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3) - x\arctan x}{(\cos x - 1)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^4}\left((-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + O(x^2)\right)}{\cancel{x^4}\left(\frac{1}{4} + O(x^2)\right)} = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+0}{\frac{1}{4}+0} = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = -\frac{2}{3}$

5) $y = y_p + y_h$: y_h) kar. ekv. $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i \Rightarrow y_h = C_1\cos x + C_2\sin x$ Vidare: $\cos^2\frac{x}{2} =$
$= \frac{1+\cos x}{2}$ Lös $y_{p_1}'' + y_{p_1} = \frac{1}{2}$ och $y_{p_2}'' + y_{p_2} = \frac{1}{2}\cos x$ ∴ $y_{p_1} = \frac{1}{2}$ Ansätt $y_{p_2} = x^m(A\cos x + B\sin x) =$
$= (m=1) = x(A\cos x + B\sin x) \Rightarrow y_{p_2}' = \ldots$, $y_{p_2}'' = \ldots$ och insättning i ekv och identifikation
av koeff. $\Rightarrow y_{p_2} = \frac{x}{4}\sin x$ ∴ $y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_h = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \cos(tx)\,dt\right) = \left[\begin{matrix} s=tx, & 0\to 0 \\ \frac{ds}{dt}=x, & x\to x^2\end{matrix}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\cos(s)\frac{1}{x}\,ds = \lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\left[\sin(s)\right]_0^{x^2} =$
$= \lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\sin x^2\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\sin x^2 + \frac{1}{\cancel{x}}(\cos x^2)2\cancel{x}\right) = -1 + 2 = 1$

7) Vi centrerar bollen med radie R i origo och låter $d = R$. Betrakta x på x-axeln mitt emellan planen så att planen anses vara parallella med yz-planet och skär x-axeln i $x - R/2$, $x + R/2$. Vi har också att $-\frac{R}{2} \le x \le \frac{R}{2}$ endast x-värden ger nollskild skärningsvolym. Skärningen mellan bollen och volymen mellan planen är en rotationsvolym runt x-axeln $V(x) =$
$= \int_{x-R/2}^{x+R/2}\pi(\sqrt{R^2 - x^2})^2\,dx$, $V'(x) = \pi\left(R^2 - (x+\frac{R}{2})^2 - (R^2 - (x - \frac{R}{2})^2)\right) = \pi\left((x-\frac{R}{2})^2 - (x+\frac{R}{2})^2\right) = -2\pi R x$

så att teckenschema:

x		0	
V'	$+$	0	$-$
V	↗		↘

V max då $V(x)$ har maximum för $x = 0$ och får då den volym $V = V(0) = \int_{-R/2}^{R/2}\pi(R^2 - x^2)\,dx$
$= 2\pi\int_0^{R/2} R^2 - x^2\,dx = 2\pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{R/2} = \ldots = \frac{11}{16}\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)$

8) Se kursboken