Matematisk analys i en variabel, E, TMV137, TMV136 140829

1) a) Lin. ordn. linjär b) Ja c) $y'=(x\sin x)'=\sin x+x\cos x \Rightarrow y''=(y')'=(\sin x+x\cos x)'=2\cos x-x\sin x$

2) a) Lin. ordn. linjär IF: $e^{\int \frac{2}{x}dx}=e^{2\ln|x|}=e^{\ln|x|^2}=e^{\ln|x^2|}=e^{\ln x^2}=x^2$

$\therefore \frac{d}{dx}(x^2y)=x^2\cdot x^2=x^4 \Rightarrow x^2y=\int\frac{d}{dx}(x^2y)dx=\int x^4dx=\frac{x^5}{5}+C \Rightarrow y=\frac{x^3}{5}+\frac{C}{x^2}$ och $y(-1)=0 \Rightarrow 0=$

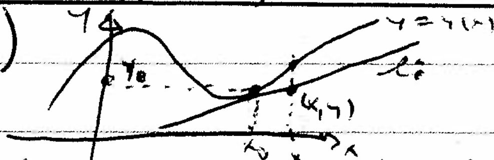
$=y(-1)=-\frac{1}{5}+C \Rightarrow C=\frac{1}{5} \Rightarrow y=\frac{1}{5}\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow y(1)=2/5$ b) 2:a ordn. linjär med konstanta koeff. $y=y_p+y_h$ Kar. ekv. $0=r^2+2r+2=(r+1)^2+1 \Rightarrow r_{1,2}=-1\pm i$

$\Rightarrow y_h=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$ Ansätt $y_p=x^m(ax+b)=(m=0)=ax+b \Rightarrow y'=a$

$y''=0 \Rightarrow 0+2a+2(ax+b)=x \Rightarrow a=1/2,\ b=-1/2 \therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

3) $\lim_{x\to0}\frac{x^2+2\cos x-2}{x^2-x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+2\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+O(x^6)\right)}{x^2-x\left(x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^4\left(\frac{1}{12}+O(x^2)\right)}{x^3\left(\frac{1}{2}+O(x)\right)}=\lim_{x\to0}x\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{12}+O(x^2)}{\frac{1}{2}+O(x)}$

$$\boxed{=0\cdot\frac{\frac{1}{12}+0}{\frac{1}{2}+0}=0\cdot\frac{1}{6}=0}$$

4) 

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

Tangentlinjens riktningskoefficient ges av $k=\frac{y-y_0}{x-x_0}=y'(x_0)=f(x_0,y(x_0))$

$=f(x_0,y_0) \Rightarrow y=y_0+(x-x_0)f(x_0,y_0)$ Tag $x=x_0+h\equiv x_1 \Rightarrow y=y_0+hf(x_0,y_0)$

Låt nu $y_1\approx f(x_1) \Rightarrow y_1=y_0+hf(x_0,y_0)$ Pss låt $x_{k+1}=x_k+h$, $k=0,1,2,\ldots$ ger $y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)$

5) a) $\int x^2\sqrt{1+2x}\,dx=[PI]=\frac{1}{3}(1+2x)^{3/2}x^2-\int\frac{1}{3}(1+2x)^{3/2}\cdot2x\,dx=[PI]=\frac{x^2}{3}(1+2x)^{3/2}+$

$-\frac{2}{3}\left(x\left(\frac{1}{5}(1+2x)^{5/2}\right)-\int\frac{1}{5}(1+2x)^{5/2}\cdot1\,dx\right)=\frac{x^2}{3}(1+2x)^{3/2}-\frac{2x}{15}(1+2x)^{5/2}+\frac{2}{15}\int(1+2x)^{5/2}dx=$

$=\frac{x^2}{3}(1+2x)^{3/2}-\frac{2x}{15}(1+2x)^{5/2}+\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{7}(1+2x)^{7/2}+C$ b) $\int\frac{x}{\cos^2x}dx=[PI]=x\tan x+$

$-\int\tan x\,dx=x\tan x-\int\frac{1}{\cos x}\sin x\,dx=x\tan x+\ln|\cos x|+C$

6) $y'=ry(K-y)$ separabel $r,K>0$ Vi ser att $y\equiv0$, $y\equiv K$ är lösningar men de uppfyller inte villkoren $y(0)=10^4$, $y(1)=2\cdot10^4$, $\lim_{x\to\infty}y(x)=10^5$ För $y\not\equiv 0,K$ gäller med $C\in\mathbb{R}$ $\int r\,dx=rx+C=\int\frac{1}{y(K-y)}dy=\frac{1}{K}\int\frac{1}{y}+\frac{1}{K-y}dy=\frac{1}{K}(\ln|y|-\ln|K-y|)=\frac{1}{K}\ln\left|\frac{y}{K-y}\right|$

$\Rightarrow \left|\frac{y}{K-y}\right|=e^{rKx}e^{KC}=e^{KC}e^{rKx}=Ce^{rKx},\ C>0 \Rightarrow \frac{y}{K-y}=\pm Ce^{rKx}=$

$=Ce^{rKx},\ C\neq0 \Rightarrow y=\frac{CKe^{rKx}}{Ce^{rKx}+1}$ Då $r,K>0$ gäller att

$10^5=\lim_{x\to\infty}y(x)=\frac{CK}{C+0}=K$; vidare är $10^4=y(0)=\frac{CK}{C+1}=\frac{10^5C}{C+1}\Rightarrow C=1/9$

och $2\cdot10^4=y(1)=CKe^{rK}/(Ce^{rK}+1) \Rightarrow r=\frac{1}{10^5}\ln\frac{9}{4}$

8) Se kursbok

7) $\sum a_k$ konv omm $\lim_{N\to\infty}\sum_{k=k_0}^{N}a_k$ existerar och är ändligt. Då $\sin x\le x$, $x\ge0$ har vi $\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}\le\frac{1}{n^{3/2}}$ och $\sum\frac{1}{n^{3/2}}$ konv $\Rightarrow \sum\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$ konv