MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137, 136)
Tid: 2014-08-29, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Elin Sohlberg, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2013 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter tentamen.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1314/

---

1. Ange och motivera svaren till följande frågor: a) Vilken typ av ODE är $xy' + x^2y = 1$? b) Är följande en tredje ordningens linjär, inhomogen ODE $xy''' + x^2y'' + xy' + 2y = \tan x$? c) Ange en andra ordningens linjär ODE som löses av åtminstone $y = x \sin x$. (2+2+2p)

2. a) Låt y lösa begynnelsevärdesproblemet $y' + \frac{2}{x}y = x^2$, $y(-1) = 0$; beräkna $y(1)$, b) lös differentialekvationen $y'' + 2y' + 2y = x$. (3+3p)

3. Beräkna om möjligt $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2\cos x - 2}{x^2 - x\ln(1+x)}$. (6p)

4. Härled Eulers metod för approximation av lösningen till begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'(x) &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$ Ge iterationsformeln explicit. (7p)

5. Använd partialintegration (integration by parts) för att beräkna integralerna (3+4p)

   a) $\int x^2\sqrt{1+2x}\,dx$, b) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$.

6. Följande modell för tillväxt av till exempel en växt- eller djurpopulation är ofta använd: Låt antalet individer vid tiden t vara $y(t)$. Tillväxten styrs då av differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = ry(K - y)$, där r och K är positiva konstanter. Vid ett försök var antalet individer 10^4 vid tiden $t = 0$ och antalet var $2 \cdot 10^4$ vid tiden $t = 1$ samt 10^5 efter mycket lång tid. Vilka värden på r och K ges av försöket? (6p)

7. Ge definitionen av att en serie $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ är konvergent. Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{n}$ är konvergent eller inte; bevisa ditt påstående. (6p)

8. Formulera och härled informellt, både formeln för volymen av en rotationskropp vid rotation runt x-axeln och formeln för volymen av en rotationskropp vid rotation runt y-axeln. (6p)

Lista med Maclaurinutvecklingar, nästa sida; vgv.

VA

MATEMATIK
Chalmers

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$