Lösningar till Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137) 2015-01-14

1. Integralen är lika med **a)** $\int 3x^2+\frac{1}{x}+4x^{-3}\,dx = x^3+\ln|x|-2x^{-2}+C$, **b)** $\int_0^1 1\,dx+\int_0^1 \arctan\sqrt{x}\,dx = 1+\int_0^1 \arctan\sqrt{x}\,dx =$ $[t=\sqrt{x}] = 1+\int_0^1 (\arctan t)2t\,dt = [\text{PI}] = 1+2([\frac{t^2}{2}\arctan t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{t^2+1}\,dt) = 1+2(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1 1-\frac{1}{t^2+1}\,dt) = \ldots = \frac{\pi}{2}$,
   c) $\int \frac{2x+5}{x^2-x-2}\,dx = [\text{PBU}] = \int -\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-2}\,dx = -\ln|x+1|+3\ln|x-2|+C$

2. Linjär, andra ordningen; $y=y_p+y_h$. För y_h: Kar. ekv. $0=r^2-2r=r(r-2)$ så att $y_h=C_1+C_2e^{2x}$. För y_p: Ansätt $y_p=x^m(Ax+B)=(m=1)=Ax^2+Bx$, $y_p'=2Ax+B$, $y_p''=2A$. Insättning i ekvationen och identifikation av koefficienter ger $y_p=x^2+3x$ så att $y=y_p+y_h=x^2+3x+C_1+C_2e^{2x}$.

3. Maclaurinutveckla: $x\sin x - x^2 = x(x-\frac{x^3}{3!}+\mathcal{O}(x^5))-x^2 = -\frac{x^4}{3!}+\mathcal{O}(x^6)$, $e^{-2x^2} = 1+(-2x^2)+\frac{(-2x^2)^2}{2!}+\mathcal{O}(x^6)$, $\cos(2x) = 1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\mathcal{O}(x^6)$.
   $$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-\cos(2x)}{x\sin x - x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+(-2x^2)+\frac{(-2x^2)^2}{2!}+\mathcal{O}(x^6)-(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\mathcal{O}(x^6))}{-\frac{x^4}{3!}+\mathcal{O}(x^6)} =$$
   $$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4x^4}{2}-\frac{2x^4}{3}+\mathcal{O}(x^6))}{-\frac{x^4}{3!}+\mathcal{O}(x^6)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4(2-\frac{2}{3}+\mathcal{O}(x^2))}{x^4(-\frac{1}{6}+\mathcal{O}(x^2))} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{3}+\mathcal{O}(x^2)}{-\frac{1}{6}+\mathcal{O}(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{3}+0}{-\frac{1}{6}+0} = -8.$$

4. För tangentlinjen till grafen för lösningen $y=y(x)$ gäller att dess riktningskoefficient k kan tecknas på två sätt: $k=y'(x_0)=\frac{y-y(x_0)}{x-x_0}$. Lös ut y ger $y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)=f(x_0,y_0)(x-x_0)+y_0$. Låt nu häri $x=x_1\equiv x_0+h$ där $h>0$ är den uniforma steglängden så att $y=hf(x_0,y_0)+y_0$ och definiera $y_1=hf(x_0,y_0)+y_0$. Då gäller om h litet att $y(x_1)\approx y_1$. Nu kommer (under tillräckliga förutsättningar), punkterna (x_n,y_n), $n=0,1,2,3,\ldots$ där $x_{n+1}=x_n+h$ och $y_{n+1}=hf(x_n,y_n)+y_n$ approximativt vara på grafen till lösningen $y=y(x)$.

5. $I\equiv\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx+\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx \equiv I_1+I_2 = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx+\lim_{R\nearrow\infty}\int_1^R \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx.$
   En primitiv funktion till integranden ges av $\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = [t=\sqrt{x}] = 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = 2\arctan(t)+C = 2\arctan(\sqrt{x})+C.$
   Vi har då att $I_1\to\frac{\pi}{2}$ då $\lim_{\varepsilon\searrow 0}$ och $I_2\to\frac{\pi}{2}$ då $\lim_{R\nearrow\infty}$. $\therefore I=\pi$, så integralen är alltså konvergent och uträkningen är bevis. Om man inte lyckas beräkna integralen exakt så kan man ändå genom att använda Jämförelsekriterier ändå visa att den är konvergent. För I_1 jämför man integranden $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ med $\frac{1}{\sqrt{x}}$ och för I_2 jämför man med $\frac{1}{\sqrt{x}^{3/2}}$.

6. Spänningen över kretsen är noll, dvs $E(t)=L(t)I'(t)+R(t)I(t) \Leftrightarrow 4I'(t)+12I(t)=60 \Leftrightarrow I'(t)+3I(t)=15$ som är en första ordningens linjär ODE med lösning $I(t)=5+Ce^{-3t}$ där konstanten C bestäms av begynnelsevillkoret $I(0)=0$ så att $I(t)=5(1+e^{-3t})\to 5$ då $t\to\infty$. Alltså är jämnviktslösningen $I(t)=5$. Detta ser man ju enklare genom att förstå att vid jämnvikt sker ingen förändring av strömmen I så att $I'(t)=0$ vid jämnvikt, som ger att ekvationen är $0+3I(t)=I'(t)+3I(t)=15$ så att $\lim_{t\to\infty} I(t)=5$.

7. Ekvationen är linjär, inhomogen så $y=y_p+y_h$ men högerledet är inte av en typ för vilket vi har en enkel genväg till en partikularlösning. Den karakteristiska ekvationen är $0=r^2+3r+2=(r+1)(r+2)$ så att $y_h=A_1e^{-x}+A_2e^{-2x}$. Faktorisering av det karakteristiska polynomet ger en faktorisering av operatorn som $(D+1)(D+2)y=\frac{1}{e^x+1} \Leftrightarrow \begin{cases}(D+1)z &= \frac{1}{e^x+1}\\(D+2)y &= z\end{cases}$ Båda ekvationerna i ekvationssystemet är första ordningen linjära och löses med integrerande faktor. Ekvationen $z'+z=\frac{1}{e^x+1}$ som med integrerande faktor ger $e^xz=\int\frac{e^x}{e^x+1}\,dx = [t=e^x] = \int\frac{1}{t+1}\,dt = \ln|t+1|+K_1 = \ln|e^x+1|+K_1$ som ger $z=e^{-x}\ln(e^x+1)+K_1e^{-x}$. Den andra ekvationen är nu $y'+2y=z$. Då vi bara letar efter **en** partikularlösning y_p kan vi göra det enkelt för oss och välja $K_1=0$. Multiplicera ekvationen med tillhörande integrerande faktor e^{2x} ger med $K_1=0$ att $e^{2x}y=\int e^x\ln(e^x+1)\,dx$ som löses med substitutionen $s=e^x$ till att ge en partikulärlösning $y_p=-e^{-x}+(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)$ så att lösningen $y=y_p+y_h=(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ för konstanter $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

8. Se kursboken; sid. 450.