MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137, 136)
Tid: 2015-01-14, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Anna Persson, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2014 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter tentamen.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1415/

---

1. Beräkna:

a) $\displaystyle\int \frac{3x^5+x^2+4}{x^3}\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^1 1+\arctan(\sqrt{x})\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2-x-2}\,dx$. (2+3+3p)

2. Lös differentialekvationen $y''-2y'=-4x-4$. (6p)

3. Beräkna om möjligt $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-\cos(2x)}{x\sin x - x^2}$. (6p)

4. Härled Eulers metod för approximation av lösningen till begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'(x) &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$ Ge iterationsformeln explicit. (6p)

5. Beräkna intergralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$. Är den konvergent eller divergent?; bevisa ditt påstående. (6p)

6. I en enkel elektrisk krets kopplas i serie ett batteri med spänning $E(t)$ volt, ett motstånd med resistans $R(t)$ ohm och en spole med induktans $L(t)$ henry. Enligt Ohms lag är då vid tiden t spänningsfallet för motståndet $R(t)I(t)$, och för spolen $L(t)I'(t)$. Här är $I(t)$ strömmen vid tiden t. Kretsen sluts vid tiden $t=0$ så att $I(0)=0$. Använd lämplig Kirchoffs lag för att teckna, ställa upp, en ODE för $I(t)$. Lös den uppställda ODE:n där vi antar att $E(t)$, $R(t)$, $L(t)$ alla är konstanta och $E=60$, $R=12$, $L=4$. Finn jämviktstillståndets lösning, dvs strömmen $I(t)$ för stora t, dvs $\lim_{t\to\infty} I(t)$. Ge också genom att tolka ODE:n ett direkt svar på denna fråga. (6p)

7. Lös differentialekvationen $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$. (6p)

8. Härled en lösningsformel för lösningen y till $y'+f(x)y=g(x)$, i termer av de givna, kända, funktionerna f och g. (6p)

Lista med Maclaurinutvecklingar, nästa sida; vgv.

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$