Matematisk analys i en variabel E1, TMV137, 150817

1a) $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = [PBU] = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = [HP] = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow$

$$\int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

b) $$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,x\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}t^{3/2} - \sqrt{t} + C = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} - \sqrt{x^2+1} + C$$

c)
$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2-x-2 \;\overline{\big)\; x^3-3x-1} \\ -(x^3-x^2-2x) \\ \hline x^2-x-1 \\ -(x^2-x-2) \\ \hline 1 \end{array}$$

$\Rightarrow x^3-3x-1 = (x+1)(x^2-x-2)+1$

$\Rightarrow \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x^2-x-2)+1}{x^2-x-2} = x+1 + \frac{1}{x^2-x-2}$

$$\therefore \int_0^1 \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}\,dx = \int_0^1 x+1\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2-x-2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2} + \int_0^1 \frac{1/3}{x-2} - \frac{1/3}{x+1}\,dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\Big[\ln|x-2| - \ln|x+1|\Big]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}\ln 2$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\cos x-2}{x^2 - x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\cos x-2}{x^2 - x\left(x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\cos x-2}{\frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)\right) - 2}{x^3\left(\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\mathcal{O}(x^4)}{x^3\left(\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathcal{O}(x)}{\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} \mathcal{O}(x)}{\lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)} =$$

$$= \frac{0}{\frac{1}{2} + 0} = 0$$

Matematisk analys i en variabel Z1 TMV137 150817 forts.

3) Vi ser att $y \equiv 0$ är lösning till $y' = y^2 e^x$, pot. sing.
Om $y(x) \neq 0$ så har vi från den separabla ODEn att

$$\frac{dy}{dx} = y^2 e^x \Longleftrightarrow \frac{1}{y^2}dy = e^x dx \Longleftrightarrow \int \frac{1}{y^2}dy = \int e^x dx$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{y} = e^x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow y = -\frac{1}{e^x + c_1} =$$

$$= \frac{1}{-c_1 - e^x} = \frac{1}{C - e^x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad y = \begin{cases} \frac{1}{C - e^x}, & C \in \mathbb{R}, \text{ allmän lösning} \\ 0 & \text{singulär} \end{cases}$$

b) $x^2 y' + y = x^2 e^{1/x} \Rightarrow y' + \frac{1}{x^2} y = e^{1/x}$ linjär 1:a ordn.

IF: $e^{\int \frac{1}{x^2}dx} = e^{-\frac{1}{x}} \quad \therefore \quad \frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{x}} y\right) = e^{-\frac{1}{x}} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{x}} y = \int \frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{1}{x}} y\right)dx = \int 1\, dx = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad y = (x + C)e^{1/x}$$

---

4) $y'' - 2y' + y = e^{-x}$ linjär $\Rightarrow y = y_p + y_h$
$\Leftrightarrow (D^2 - 2D + 1)y = e^{-x}$

För y_h: Kar. ekv: $0 = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 \Rightarrow y_h = (Ax + B)e^x$

För y_p: Ansätt $y_p = Cx^k e^{-x} = (k=0) = Ce^{-x} \Rightarrow y_p' = -Ce^{-x}$,
$y_p'' = Ce^{-x}$ Insättning $\Rightarrow e^{-x} = y_p'' - 2y_p' + y_p = Ce^{-x} - 2(-Ce^{-x}) + Ce^{-x} =$
$= 4Ce^{-x} \quad \therefore \quad 4C = 1 \Rightarrow C = 1/4 \Rightarrow y_p = \frac{1}{4}e^{-x}$

$$\therefore \quad y = y_p + y_h = \frac{1}{4}e^{-x} + (Ax + B)e^x \quad \text{där } A, B \in \mathbb{R}$$

Matematisk Analys i en variabel El, TMV137, 150817, Lars

5) För tangentlinjen till grafen för lösningen $y=y(x)$ gäller att dess riktningskoefficient k kan tecknas på två sätt: $k = y'(x_0) = \frac{y - y(x_0)}{x - x_0}$ där paret (x,y) är en punkt på tangentlinjen i $\mathbb{R}^2$.

Lös ut $y \Rightarrow y = y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0) = f(x_0,y_0)(x-x_0)+y(x_0) = f(x_0,y_0)(x-x_0)+y_0$. Låt nu här $x = x_1 \equiv x_0 + h$ där $h>0$ är den så kallade steglängden så att $y = hf(x_0,y_0)+y_0$ och definiera $y_1 = hf(x_0,y_0)+y_0$. Då gäller om $h>0$ litet att $y(x_1) \approx y_1$ så att punkten (x_1,y_1) approximativt är på grafen till den exakta lösningen $y=y(x)$ och är nära (till höger om, om $h>0$) punkten (x_0,y_0) som är på grafen. PSS kommer nu punkterna (x_n,y_n) $n=0,1,2,\dots$ där $x_{n+1} = x_n + h$ och $y_{n+1} = hf(x_n,y_n)+y_n$ att approximativt vara på grafen till lösningen $y=y(x)$, $y(x_0)=y_0$ till BVP:et.

6) Sätt för $y''' + \cos x\, y'' + 2\sin x\, y' - x y = g(x)$ förstafunktionen $x_1 \equiv y$, $x_2 \equiv y'$ för andrafunktionen x_2 och för tredje funktionen $x_3 \equiv y''$. Då gäller $x_2 = y' = x_1'$ och $x_3 = y'' = x_2'$ och från ekvationen får vi $x_3' = (y'')' = y''' = g(x) - (\cos x)x_3 - (2\sin x)x_2 + x x_1$ så att vi får ett ekvationssystem för ~~de~~ tre funktionerna x_1, x_2 och x_3 där bara första ordningens derivator förekommer

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = \cancel{x}\, x_1 - (2\sin x)x_2 - (\cos x)x_3 + g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x x_1 - 2\sin x\, x_2 - \cos x\, x_3 + g(x) \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ (om man läst lin alg (~~tekn.~~ senare ikke bli svaret)) $\Leftrightarrow$ med $\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\bar{X}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -2\sin x & -\cos x \end{pmatrix}}_{\equiv A} \bar{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}}_{\equiv B} \Leftrightarrow \boxed{\bar{X}' = A\bar{X} + B}$$

Matematisk Analys i en variabel B1 TNA137 150817 forts

7) Låt $y(t)$ = mängden vatten i liter i hinken vid tiden t i timmar.

Avdunstning $\sim y \Leftrightarrow$ Avdunst $= ky$ k konst > 0
$= A(t)$

Förändringen av mängden vatten i hinken per tidsenhet $= y'(t) =$ tillrinsel − avdunstning $=$

$= 1 - ky \Leftrightarrow y' + ky = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^{kt} y) = e^{kt}$

$\Leftrightarrow e^{kt} y = \int \frac{d}{dt}(e^{kt} y)\,dt = \int e^{kt}\,dt = \frac{1}{k} e^{kt} + C$

där C konst $\in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{k} + Ce^{-kt}$

Enligt uppgift är avdunstningen $0{,}2\ l/h = \frac{1}{5}\ l/h$ vid en viss tid vi kallar T då mängden vatten i hinken är $1\ l \Leftrightarrow y(T) = 1$

Vi har $A(T)$ = avdunstning vid tiden $T = \frac{1}{5} =$
$= ky(T) = k \cdot 1$

$\therefore k = \frac{1}{5}$ $\therefore y(t) = \frac{1}{\frac{1}{5}} + Ce^{-t/5} = 5 + Ce^{-t/5}$

För att bestämma C har vi $0 = y(0) = 5 + Ce^0 = 5 + C \Rightarrow C = -5$ $\therefore y(t) = 5 - 5e^{-t/5}$ Vi har att $y'(t) = e^{-t/5} > 0$ så y är (strängt) växande, dess gräns att största värde $= \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} 5 - 5e^{-t/5} = 5 - 0 = 5$

$\therefore$ Lisavetas hink behöver vara minst 5 liter (annars blir det väl blött och skarp! :-))

8) Se kurslitteraturen.