MATEMATIK
Chalmers

Tentamen Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137, 136)
Tid: 2015-08-17, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Gustav Kettil, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från hösten 2014 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter tentamen.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1415/

---

1. Beräkna om möjligt:

   a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-3x-1}{x^2-x-2}\,dx$. (2+3+3p)

2. Beräkna om möjligt: (6p)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\cos x-2}{x^2-x\ln(1+x)}.$$

3. Beräkna om möjligt: a) $y' = y^2e^x$, b) $x^2y' + y = x^2e^{1/x}$. (3+3p)

4. Lös differentialekvationen $y'' - 2y' + y = e^{-x}$. (6p)

5. Härled Eulers metod för approximation av lösningen till begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'(x) &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$ Ge iterationsformeln explicit. (6p)

6. Omformulera differentialekvationen $y''' + \cos x y'' + 2\sin x y' - xy = g(x)$ som ett ekvationssystem av första ordningens ODE. (6p)

7. Det börjar droppa vatten från ett hål i taket hos Lisaveta, och hon ställer en hink under hålet. Det droppar med jämn hastighet, 1 liter per timme. Vattnet avdunstar med en hastighet som är proportionell mot mängden vatten i hinken. När denna mängd är 1 liter så avdunstar vattnet med hastigheten 0,2 liter per timme. Hur stor behöver Lisavetas hink vara för att golvet inte skall bli blött? (6p)

8. Formulera och bevisa någon form av Jämförelsekriterie för positiva serier. (6p)

Lista med Maclaurinutvecklingar, nästa sida; vgv.

VA

MATEMATIK
Chalmers

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$