MATEMATIK
Chalmers

Tentamen Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137, 136)
Tid: 2016-01-13, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Raad Salman, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från läsåret 1516 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter tentamen.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1516/

---

1. Beräkna om möjligt:
   a) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-3x+2}\,dx$, b) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$, c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x\arctan(\ln x)}{x}\,dx$, (8p)
   d) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$.

2. Lös om möjligt följande ODE:
   a) $y'-xy=x$, b) $y'-2xy^2=0$, c) finn för något $k\in\mathbb{R}$ den lösning y till $y'=ky$ som uppfyller $y(0)=1,\ y(1)=2$, d) $y''-y'=x$. (6p)

3. Beräkna om möjligt: i) Maclaurinpolynomet av grad 4 för funktionen $f(x)=x^3$, ii) Taylorpolynomet av grad 4 runt punkten $a=1$ för funktionen $f(x)=x^3$, iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x(\sin x-x)}{(\cos x-1)^2}$. (6p)

4. Lös differentialekvationen $y''+2y'+2y=x\sin x$. (6p)

5. Följande modell för tillväxt av till exempel en växt- eller djurpopulation är ofta använd: Låt antalet individer vid tiden t vara $y(t)$. Tillväxten styrs då av differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx}=ry(K-y)$, där r och K är positiva konstanter. Vid ett försök var antalet individer 10^4 vid tiden $t=0$. Antalet var $2\cdot 10^4$ vid tiden $t=1$ och 10^5 efter mycket lång tid. Vilka värden på r och K ges av försöket? (6p)

6. Avgör om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x^3}}{\sqrt{x}+x^{2/3}}\,dx$ är konvergent eller divergent och bevisa ditt påstående. (6p)

7. Lös differentialekvationen $y''+2y'+y=e^{-x}\arctan x$. (6p)

8. a) Formulera Superpositionsprincipen och bevisa den för en andra ordningens ODE, b) Bevisa första delen i differentialkalkylens huvudsats; dvs bevisa att funktionen $F(x)\equiv\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ är deriverbar då $x\in[a,b]$ och $f\in C([a,b])$, samt beräkna dess derivata. (2+4p)

Lista med Maclaurinutvecklingar, nästa sida; vgv.

VA

MATEMATIK
Chalmers

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$