MATEMATIK
Chalmers

Tentamen Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137, 136)
Tid: 2016-04-04, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Mattias Lennartsson, ankn 5325

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från läsåret 1516 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter tentamen.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1516/

---

1. Beräkna om möjligt:
a) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+1}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{x+x^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int \tan x\,dx$, d) $\displaystyle\int xe^x\,dx$. (8p)

2. Lös om möjligt följande ODE:
a) $y' - y = x,\ y(0) = 0$, b) $y' - xy = 0$, c) $y'' - 8y' + 15y = 0$, (6p)
d) $y'' + 6y' + 9y = 0$.

3. Beräkna om möjligt: i) Maclaurinpolynomet av grad 4 för funktionen $f(x) = x^3$, ii) Taylorpolynomet av grad 4 runt punkten $a = 1$ för funktionen $f(x) = x^3$, iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(\sin x - x)}{(\cos x - 1)^2}$. (6p)

4. Lös differentialekvationen $y'' + y' - 2y = e^x$. (6p)

5. Avgör om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3 + x^{2/3}}\,dx$ är konvergent eller divergent och bevisa ditt påstående. (6p)

6. En dag började det snöa. En snöplog skickades ut klockan 12. Den har plogat 2 mil klockan 13 och 3 mil klockan 14. När började det snöa? Antag att snöfallet intensitet är konstant och att plogen plogar en konstant mängd snö per tidsenhet. (6p)

7. Beräkna om möjligt gränsvärdet $\displaystyle\lim_{a\searrow 0} \frac{1}{a}\int_a^{3a/2} \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}\,dx$. (6p)

8. Bevisa differentialkalkylens huvudsats, båda delarna; dvs bevisa att funktionen $F(x) \equiv \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ är deriverbar då $x \in (a,b)$ och $f \in C([a,b])$, samt beräkna dess derivata; och bevisa också som satsens andra del, insättningsformeln. (6p)

Lista med Maclaurinutvecklingar, nästa sida; vgv.

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$