Lösningar till Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137) 2017-01-11

1. **a)** $\int \sqrt{1-x}\,dx = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + C$, **b)** $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + C$, **c)** $\int x\cos x\,dx = x \in x - \int 1 \cdot \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$, **d)** $I \equiv \int e^x \cos x\,dx = [\text{PI}] = e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx = e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx = e^x\cos x + (e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx) = e^x(\cos x + \sin x) - I.$ $\therefore 2I = e^x(\cos x + \sin x) + C$ och alltså $I = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$, **e)** integranden är en udda funktion som integreras på ett jämnt intervall kring origo; så integralen är noll, **f)** $\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{(x-1)(x^2-1)} = x + 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|\frac{x-1}{x+1}| - \frac{2}{x-1} + C$, **g)** $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}}\,dx + \int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}}\,dx$, där den första integralen är integralen av en kontinuerlig funktion på ett begränsat intervall och alltså existerar. För den andra integralen, som är generaliserad, bara pga, ett obegränsat integrationsintervall ser vi att för $x \geq 1$ så gäller $0 \leq \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}} \leq \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}}}$ och då för $t \geq 0$ gäller enligt serieutvecklingen för e^t att för varje heltal $k \in \mathbb{N}$, att $e^t \geq 1 + \frac{t^k}{k!}$. Vi får alltså för t ex $k = 3$ att $0 \leq \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^6/6}} \leq \frac{\sqrt{6}}{x^2}$ så att enligt Jämförelsekriteriet för icke-negativa integrander, integralen $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}}\,dx$ är konvergent då ju integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent enligt sats.

2. **a)** ODE:n $y' = \frac{y^2-1}{2}$ är separabel och vi ser att $y = 1$ och $y = -1$ är potentiellt singulära lösningar; men de uppfyller inte begynnelsevillkoret, så de äe ej sökta lösningar. Om $y^2 \neq 1$ får vi $\int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\,dy = \int \frac{1}{2\,dx}$ och [PBU] ger att vänsterledets integrand kan skrivas $\frac{1/2}{y-1} - \frac{1/2}{y+1}$ så att vi efter integration får $\frac{1}{2}\ln|\frac{y-1}{y+1}| = \frac{1}{2}(x + C_1)$ däe C_1 är en godtycklig reell konstant. Förenkling ger $|\frac{y-1}{y+1}| = C_2e^x$ där $C_2 > 0$ så att $\frac{y-1}{y+1} = \pm C_2 e^x = Ce^x$ där $C \neq 0$. Detta ger $y = \frac{1 - Ce^x}{1 + Ce^x}$ och insättning av begynnelsevillkoret ger att $C = -1/3$ så att sökt lösning är $y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^x}{1 - \frac{1}{3}e^x} = \frac{3 + e^x}{3 - e^x}$. **b)** Vi får $y' \pm \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2}$ med IF $e^{\int \pm \frac{2x}{1+x^2}\,dx} = e^{\pm \ln|1+x^2|} = (1+x^2)^{\pm 1}$ och $\therefore$ $\frac{d}{dx}((1+x^2)^{\pm 1}y) = \frac{x}{1+x^2}(1+x^2)^{\pm 1}$ och vi ser att välja + i $\pm$ ger något enklare räkningar så med +-valet får vi: $\frac{d}{dx}((1+x^2)y) = x$ som ger $(1+x^2)y = \int \frac{d}{dx}((1+x^2)y)\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$ så att lösningarna är $y = \frac{x^2 + C}{2(x^2+1)},\ C \in \mathbb{R}$.

3. Entydighetssatsen säger att om $f(x) = p_n(x) + \mathcal{O}((x-a)^{n+1})$ då $x \to a$ så är $p_n(x)$ Taylorpolynomet av grad n för f för punkten a. **i)** Då $f(x) = x^3 = 0 + x^3 = 0 + \mathcal{O}(x^3)$ så är Maclaurinpolynomet av grad 2 för f, polynomet som är identiskt 0. **ii)** Då $f(x) = x^3 = x^3 + 0 = x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ så ges Maclaurinpolynomet av grad 4 för f, dvs polynomet $P_4(x)$, av $P_4(x) = x^3$. **iii)** $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{(\sin x)\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{(x + \mathcal{O}(x^3))(x^2 + \mathcal{O}[x^4))} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5) - x}{(x + \mathcal{O}(x^3))(x^2 + \mathcal{O}[x^4))} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(-\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2))}{x^3(1 + \mathcal{O}(x^3))} = \frac{-\frac{1}{3} + 0}{1 + 0} = -\frac{1}{3}$.

4. ODE:n linjär så $y = y_p + y_h$. Kar. ekv. är $0 = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 \Rightarrow r_{1,2} = -1 \Rightarrow$ $y_h = (C_1x + C_2)e^{-x}$. Ansätt $y_p = x^m e^{-x}(Ax + B) = (m = 2) = x^2e^{-x}(Ax + B) = (Ax^3 + Bx)e^{-x}$, vilket ger $y_p' = (3Ax^2 + 2Bx)e^{-x} - (Ax^3 + bx^2)e^{-x} = (3Ax^2 + 2Bx)e^{-x} - y_p \Rightarrow y_p'' = \ldots = (-6Ax^2 + (6A - 4B)x + 2B)e^{-x} + y_p$. Insättning i ekvationen ger $e^{-x}(x+1) = y_p'' + 2y_p' + y_p = \ldots = e^{-x}(6Ax + 2B)$ och identifikation av koefficienter ger $A = 1/6,\ B = 1/2$ vílket ger $y = (\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + C_1x + C_2)e^{-x}$.

5. Teckna riktningskoefficienten k för den räta linjen som utgör tangenten till kurvan i punkten (x_0, y_0) på två sätt; $k = f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ där (x, y) är en godtycklig punkt på tangentlinjen. Då tangenten går igenom punkten $(x, y) = (\frac{1}{2}x_0, 1)$ får vi $\frac{1 - f(x_0)}{0 - \frac{1}{2}x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow$ (omformulering) $\Leftrightarrow \frac{1-y}{\frac{1}{2}x} = y' \Leftrightarrow$ (om $y \neq 1$) $\Leftrightarrow \frac{1}{1-y}y' = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{1-y}\,dy = -2\int \frac{1}{x}\,dx \Leftrightarrow -\ln|1-y| = -2\ln|x| + C_1 = -\ln(x^2) + C_1 \Leftrightarrow \ln|1-y| = (\ln(x^2)) + C_2$ där C_1 och C_2 är godtyckliga reella tal; konstanter. Av detta följer $|y - 1| = e^{C_2 + \ln(x^2)} = e^{C_2}x^2 = C_3x^2$ där $C_3 > 0$, vilket ger $y - 1 = \pm C_3x^2 = C_4x^2$ där $C_4 \neq 0$. Vi ser vidare att $y \equiv 1$ är en potentiellt singulär lösning som kan inordnas i den allmänna lösningen genom att tillåta $C_4 = 0$. Lösningarna är alltså $y = 1 + Cx^2,\ C \in \mathbb{R}$.

6. **a)** Medelpunkten $(2,2)$ för cirkelskivan som har area π, rör sig vid rotation runt x-axeln, längs omkretsen på en cirkel med radie 2. Enligt Pappos-Guldins regel är då rotationsvolymen V (av den så utskurna 'donuten' $V = A \cdot L = \pi \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi^2$.
   b) Cirkelns ekvation är $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1^2$ så rotationsvolymen vid rotation runt x-axeln blir mha skivformeln $V = \int_1^3 \pi(2+\sqrt{1-(x-2)^2})^2\,dx - \int_1^3 \pi(2-\sqrt{1-(x-2)^2})^2\,dx = 8\pi \int_1^3 \sqrt{1-(x-2)^2}\,dx = \Big[\theta = \arccos(x-2) \Leftrightarrow \cos\theta = x-2,\ |\theta| \le \pi/2\Big] = 16\pi \int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1-\cos^2\theta}(-\sin\theta)\,d\theta = 16\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta = \text{(dubbla vinkeln)} = \frac{16\pi}{2}\int_0^{\pi/2} 1-\cos(2\theta)\,d\theta = 8\pi\big[\theta - (1/2)\sin(2\theta)\big]_0^{\pi/2} = 4\pi^2$; alltså samma resultat som i a).

7. Ekvationen $(y')^2 = 9y^{4/3} \Rightarrow |y'| = 3y^{3/2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y' & = & 3y^{2/3} \\ y' & = & -3y^{2/3}. \end{array}\right.$ Dessa ekvationer är separabla och har båda singulär lösning $y = 0$. Om $y \neq 0$ får vi för den första ekvationen $\int \frac{1}{3}\frac{1}{y^{2/3}}\,dy = \int 1\,dx \Rightarrow y^{1/3} = x + C \Rightarrow y = (x+C_1)^3$; den andra ekvatioen ger $y = -(x+C_2)^3$. Vi definierar nu en funktion y genom skarvning av lösningarna ovan: $y = \left\{\begin{array}{cc} -(x+1)^3 & x \le -1 \\ 0 & -1 \le x \le 2 \\ (x-2)^3 & 2 \le x \end{array}\right.$
   Det är klart att denna y är en lösning i det inre av alla delintervallen och man behöver bara se att det är en lösning i skarvpunkterna $x = -1$ och $x = 2$. Där är ju $y = 0$ så vi behöver visa att derivatan existerar i dessa punkter och att även dessa derivator är 0 så att ekvationen är uppfylld. Visa att derivatorna existerar gör man t ex genom att skriva ut deivatornas definitionsgränsvärde och se att höger- respektive vänstergränsväder av dessa existerar och är 0. Eftersom dessa höger- respektive vänstergränsvärden är höger- respektive vänstergränsvärden av lösningar som är definierade i dessa punkter, följer detta direkt.

8. Se kursboken; sid. 311.