MATEMATIK
Chalmers

Tentamen Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137, 136)
Tid: 2017-01-11, kl 08.30 - 12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare. Telefonvakt: Felix Held, ankn. 5325.

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från läsåret 1617 inkluderas.) Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter tentamen. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1617/

---

1. Beräkna integralerna i a) - f) samt avgör om integralen i g) är konveregent eller divergent:
   a) $\int \sqrt{1-x}\,dx$, b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ c) $\int x\cos x\,dx$, d) $\int e^x\cos x\,dx$ (9p)
   e) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{(5-\cos x)^2}\,dx$, f) $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$, g) $\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}}\,dx$.

2. a) Lös om möjligt följande begynnelsevärdesproblem: $y' = (y^2-1)/2$, $y(0) = 2$, b) Lös någon av de två (för + respektive -) ekvationerna $(1+x^2)y' \pm 2xy = x$. (6p)

3. Låt $f(x) = x^3$. Bestäm för funktionen $f(x)$, Maclaurinpolynomet av (6p)
   i) grad 2, ii) av grad 4, iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{(\sin x)\ln(1+x^2)}$.

4. Lös differentialekvationen $y'' + 2y' + y = e^{-x}(x+1)$. (6p)

5. Finn de kurvor $y = f(x)$ i planet, sådana att tangenten i en punkt (x_0, y_0) på kurvan skär linjen $y = 1$ i punkten $(\frac{1}{2}x_0, 1)$. (6p)

6. Cirkeln i planet med medelpunkt $(2, 2)$ och radie 1, roteras runt x-axeln och skär då ut en volym i form av en 'donut' i $\mathbb{R}^3$. (6p)
   a) Använd Pappos-Guldins regel för att enkelt bestämma volymen av den utskurna 'donuten'. **Pappos-Guldins regel:** *Låt D vara ett område i planet och ℓ en linje i samma plan, som ej skär D. Volymen V som skärs ut av D då detta område roteras runt linjen ℓ ges av $V = AL$ där A är arean av D och L är omkretsen av den cirkel som medelpunkten för D (också kallad mittpunkten, eller 'tyngdpunkten' eller centroiden) beskriver vid rotationen.*
   b) Använd integraler för att bestämma samma rotationsvolym som i a).

7. Bestäm om möjligt en lösning till $(y')^2 = 9y^{4/3}$ sådan att $y(-2) = 1$ och $y(3) = 1$. Bevisa speciellt att din föreslagna lösning verkligen är deriverbar och uppfyller ODE:n. **Ledning**: Skarvning. (5p)

8. Formulera och bevisa Differential- och integralkalkylens huvudsats; båda 'delarna'. (6p)

Lista med Maclaurinutvecklingar, nästa sida; vgv.

VA

MATEMATIK
Chalmers

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$