MATEMATIK Tentamen Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137, 136)
Chalmers Tid: 2017-08-14, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare. Telefonvakt: Ivar Simonsson, ankn. 5325.

---

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från läsåret 1617 inkluderas.) Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1617/

---

1. Beräkna om möjligt integralerna i a) - g):

   a) $\int \sqrt{1-x}\,dx$, b) $\int \frac{1}{4x^2+1}\,dx$, c) $\int \frac{x}{4x^2+1}\,dx$, d) $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$, (9p)

   e) $\int \frac{1}{x+x^2}\,dx$, f) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ g) $\int \frac{x^3+4x^2+5x+1}{x^2+4x+5}\,dx$.

2. a) Lös om möjligt följande ODE och begynnelsevärdesproblem för ODE:
   a) $y'-y=x$, $y(0)=0$, b) $y''+y'-12y=0$, c) $y'=y^2$, $y(0)=0$, (6p)
   d) $y''+7y'+10y=e^x$.

3. Beräkna om möjligt $\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^2)}{(1-\cos(3x))^2}$. (6p)

4. Beräkna om möjligt integralerna i a) - c):

   a) $\int x^2 e^x\,dx$, b) $\int x^2 \ln x\,dx$, c) $\int_{\pi/4}^{\pi} \cos^2 x\,dx$. (6p)

5. Finn de kurvor $y=f(x)$ i planet, sådana att tangenten i en punkt $(x_0, y_0)$ på kurvan skär linjen $y=1$ i punkten $(\frac{1}{2}x_0, 1)$. (6p)

6. En behållare på 1000 liter är fylld med vatten och 50 kg salt; upplöst och välblandat i behållaren. Behållaren tillförs 10 liter per minut av en vattenblandning innehållande 10 gram salt per liter. Samtidigt avtappas från behållarens välblandade vatten 10 liter per minut; så att behållarens innehåll hela tiden är konstant 1000 liter. Hur mycket salt innehåller behållaren efter 40 minuter? (6p)

7. Lös om möjligt $y''+2y'+2y=x+1+x\sin x$. (5p)

8. Formulera och bevisa formeln för partialintegration, (PI), i en bestämd integral. (6p)

Lista med Maclaurinutvecklingar, nästa sida; vgv.

VA

## Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är $\xi$ ett tal mellan 0 och $x$.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$