Lösningar till Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137) 2018-01-10

1. **a)** $\int \sqrt{1-x}\,dx = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}+C$, **b)** $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}+C$, **c)** $\int x\cos x\,dx = x \in x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\sin x+\cos x+C$, **d)** $I \equiv \int e^x\cos x\,dx = [\text{PI}] = e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx = e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx = e^x\cos x + (e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx) = e^x(\cos x+\sin x) - I$. $\therefore 2I = e^x(\cos x+\sin x)+C$ och alltså $I = \frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$, **e)** integranden är en udda funktion som integreras på ett jämnt intervall kring origo; så integralen är noll, **f)** $\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1} = x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1} = x+1+\frac{4x}{(x-1)(x^2-1)} = x+1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow \int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \frac{x^2}{2}+x+\ln|\frac{x-1}{x+1}| - \frac{2}{x-1}+C$, **g)** $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}}\,dx + \int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}}\,dx$, där den första integralen är integralen av en kontinuerlig funktion på ett begränsat intervall och alltså existerar. För den andra integralen, som är generaliserad, bara pga, ett obegränsat integrationsintervall ser vi att för $x \geq 1$ så gäller $0 \leq \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}} \leq \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}}}$ och då för $t \geq 0$ gäller enligt serieutvecklingen för e^t att för varje heltal $k \in \mathbb{N}$, att $e^t \geq 1+\frac{t^k}{k!}$. Vi får alltså för t ex $k=3$ att $0 \leq \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^6/6}} \leq \frac{\sqrt{6}}{x^2}$ så att enligt Jämförelsekriteriet för icke-negativa integrander, integralen $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}}\,dx$ är konvergent då ju integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent enligt sats.

2. **a)** Ekvationen $y' = y^2$ har lösning $y=0$. Ekvationen är separabel och om $y \neq 0$ får vi $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}dy = 1\cdot dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x+C \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x+C} = \frac{1}{C-x}$, $C \in \mathbb{R}$. Vi ser att lösningarna är $y = \frac{1}{C-x}$, allmän lösning och $y=0$, singulär lösning. BV-problem 1) har lösning $y = \frac{1}{1-x}$ och 2) har lösning $y=0$. **b)** Ekvationen $\Leftrightarrow y'\frac{2}{x}y = x^2$ som är linjär med IF $e^{\int -\frac{2}{x}\,dx} = x^{-2}$. Det följer att $x^{-2}y = \int \frac{d}{dx}(x^{-2}y)\,dx = \int x^{-2}x^2\,dx = \int 1\,dx = x+C \Leftrightarrow y = x^2(x+C)$. **c)** Ekvationen $y''-5y'+6y = 6x+1$ är linjär så $y = y_p+y_h$. Då ekvationen har konstanta koefficienter så kan vi finna y_h genom att lösa karakteristiska ekvationen $0 = r^2-5r+6 \Rightarrow r_{1,2} = 2,\ 3$ så $y_h = C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$. För att finna y_p noterar vi att högerledet är av en typ där vi kan ansätta partikulärlösningen. Vi ansätter $y_p = x^m(ax+b) = [m=0] = ax+b$. Derivering och insättning i ekvationen samt identifikation av koefficienterna i vänster- och högerled i den då erhållna polynomekvationen ger ett ekvationssystem för a och b med lösning $a=b=1$. Vi får att $\therefore y = x+1+C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.

3. Entydighetssatsen säger att om $f(x) = p_n(x)+\mathcal{O}((x-a)^{n+1})$ då $x \to a$ så är $p_n(x)$ Taylorpolynomet av grad n för f för punkten a. **i)** Då $f(x) = x^3 = 0+x^3 = 0+\mathcal{O}(x^3)$ så är Maclaurinpolynomet av grad 2 för f, polynomet som är identiskt 0. **ii)** Då $f(x) = x^3 = x^3+0 = x^3+\mathcal{O}(x^5)$ så ges Maclaurinpolynomet av grad 4 för f, dvs polynomet $P_4(x)$, av $P_4(x) = x^3$. **iii)** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-x\arctan x}{(\cos x-1)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^4}{2}+\mathcal{O}(x^6)-x(x-\frac{x^3}{3}+\mathcal{O}(x^5))}{(-\frac{x^2}{2!}+\mathcal{O}(x^4))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})x^4+\mathcal{O}(x^6)}{(x^2(-\frac{1}{2!}+\mathcal{O}(x^2)))^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4(-\frac{1}{6}+\mathcal{O}(x^2))}{x^4(-\frac{1}{2!}+\mathcal{O}(x^2))^2} = \frac{-\frac{1}{6}+0}{(-\frac{1}{2!}+0)^2} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$.

4. Vi har $0 = x^2+y^2-4(x+y)+7 = (x-2)^2-4+(y-2)^2-4+7 \Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y-2)^2 = 1$ så punkterna (x,y) som uppfyller detta är punkterna på en cirkel med radie 1 och medelpunkt i $(2,2)$. Vi får alltså: **a)** Rotation runt x-axeln ger då en volym V$= \int_1^3 \pi(2+\sqrt{1-(x-2)^2})^2\,dx - \int_1^3 \pi(2-\sqrt{1-(x-2)^2})^2\,dx = 8\pi\int_1^3 \sqrt{1-(x-2)^2}\,dx = [t = x-2] = 16\pi\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = 16\pi[\frac{1}{2}(\arcsin t + t\sqrt{1-t^2})]_0^1 = 8\pi(\arcsin 1+0) = 4\pi^2$, och **b)** Här kan man använda skalformeln för rotation runt y-axeln, men man kan ju av symmetriskäl se det som att vi 'byter'x-axeln i uppgift a) mot y-axeln, och vi ser då direkt att svaret blir detsamma som i a); alltså är svaret även nu $4\pi^2$.

5. Låt $x(t)$ vara mängden salt i behållaren mätt i kg vid tiden t. Då är $\frac{dx}{dt}$ = förändringen i saltmängden i behållaren per tidsenhet. Här är en tidsenhet = en 'klockcykel'= 1 min. $\therefore \frac{dx}{dt}$ = mängden salt in i behållaren - mängden salt ut ur behållaren; i kilo per tidsenhet $\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{10\cdot 10}{1000} - \frac{x}{1000}\cdot 10 = \frac{1}{10} - \frac{x}{100} = \frac{10-x}{100} \Leftrightarrow x' = \frac{10-x}{100}$ och denna ODE är linjär och även separabel. Vi löser den som separabel. Om $x \neq 10$ ($x=10$ är en lösning men den är inte relevant för oss) så gäller $\frac{1}{10-x}dx = \frac{1}{100}dt \Rightarrow \int \frac{1}{10-x}dx = \int \frac{1}{100}dt \Rightarrow -\ln|10-x| = \frac{1}{100}t+C$, $C \in \mathbb{R} \Rightarrow x = 10+Ce^{-t/100}$ där $C \neq 0$ Även C=0 ger ju en lösning, den potentiellt singulära, konstanta, lösningen $x=10$; som alltså inte var singulär utan bara potentiellt singulär. $\therefore C \in \mathbb{R}$. Vidare ger $x(0) = 50$ att $C = 40$ så att den sökta lösningen är $x = 10+40e^{-t/100}$. Vi får att $x(40) = 10+40e^{-2/5} \approx 36,8 \approxeq 40$ kg salt i behållaren vid tiden $t = 40$ min.

6. Se kursens inlämningsuppgifter.

7. **a)** Vi har $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = [PI] = \frac{1}{\pi}([f(x)\frac{\sin nx}{n}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\sin nx}{n}\,dx) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = [PI] =$ $-\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\Big([f'(x)(\frac{-\cos nx}{n})]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)(\frac{-\cos nx}{n})\,dx\Big) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\Big(-\frac{1}{n}(f'(\pi)(\cos n\pi) - f'(-\pi)\cos(n(-\pi)) + \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx)\Big) =$ $-\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\Big(-\frac{1}{n}(f'(\pi)-f'(-\pi))\cos(n(\pi)) + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx\Big) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\Big(0 + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx\Big) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx.$
$\therefore |a_n| = |-\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx| \leq \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)\cos(nx)|\,dx \leq \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\,dx \leq \frac{C}{n^2}$, dvs vi har visat a).
b) Vi ser att Fourierseriens termer, $a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, i allmänhet växlar tecken i seriens svans (beroende på vad ett specifikt val av x är). För att kunna använda jämförelsekriterier behöver vi att termerna är positiva (eller snarare, inte växlar tecken i svansen). För den skull studerar vi absolutkonvergens, d v s konvergens för serien $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)|$; där alltså seriens termer är icke-negativa (så vi kan använda jämförelsekriterier). Är serien absolutkonvergent är den också konvergent enligt en sats. Vidare uppfyller termerna i serien $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)|$ att $0 \leq |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leq (|a_n| + |b_n|) \leq (\frac{C_1}{n^2} + \frac{C_2}{n^2}) \leq \frac{C}{n^2}$ och då enligt Integralkriteriet för positiva serier har vi att serien $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ är konvergent då $\alpha > 1$. Alltså, då $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ är konvergent, så är alltså enligt jämförelsekriteriet för positiva serier (alltså serier med positiva, eller snarare icke-negativa termer) även Fourierserien absolutkonvergent och därmed konvergent.

8. Se kursboken.