MATEMATIK
Chalmers

Tentamen Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137, 136)
Tid: 2018-01-10, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare. Telefonvakt: Oskar Allerbo, ankn. 5325.

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från läsåret 1718 inkluderas.) Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter tentamen. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1718/

OBS: Tentamenstesen fortsätter på baksidan; vgv.

1. Beräkna integralerna i a) - f) samt avgör om integralen i g) är konveregent eller divergent: (9p)
a) $\int \sqrt{1-x}\,dx$, b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ c) $\int x\cos x\,dx$, d) $\int e^x \cos x\,dx$ e) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{(5-\cos x)^2}\,dx$,
f) $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$, g) $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{e^{x^2}+1}}\,dx$.

2. a) Lös om möjligt följande två begynnelsevärdesproblem: 1) $y' = y^2$, $y(0) = 1$, 2) samma ekvation men med begynnelsevillkoret $y(0) = 0$, (6p)
b) Lös $y' = \frac{2}{x}y + x^2$, c) Lös $y'' - 5y' + 6y = 6x + 1$.

3. Låt $f(x) = x^3$. Bestäm för $f(x)$, Maclaurinpolynomet av i) grad 2, ii) av grad 4, iii) beräkna om möjligt (6p)
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x\arctan(x)}{(\cos x - 1)^2}$.

4. Betrakta de punkter (x, y) i $\mathbb{R}^2$ som uppfyller relationen $x^2 + y^2 - 4(x + y) + 7 = 0$. Beräkna om möjligt den volym som upptår då punkterna (x, y) i $\mathbb{R}^2$ som uppfyller relationen $x^2+y^2-4(x+y)+7 < 0$ roteras runt **a**) x-axeln, **b**) y-axeln. **Ledning:** För **a**): Punkterna som uppfyller $x^2 + y^2 - 4(x + y) + 7 = 0$ är punkterna på en cirkel; **b**): Tänk först, räkna (eventuellt) sedan. (6p)

5. En behållare på 1000 liter är fylld med vatten och 50 kg salt; upplöst och välblandat i behållaren. Behållaren tillförs 10 liter per minut av en vattenblandning innehållande 10 gram salt per liter. Samtidigt avtappas från behållarens välblandade vatten 10 liter per minut; så att behållarens innehåll hela tiden är konstant 1000 liter. Hur mycket salt innehåller behållaren efter 40 minuter? (6p)

6. Lös något av följande tre ODE-problem: **a**) ekvationen $xy' - x^2y = x^4y^2$, **b**) begynnelsevärdesproblemet $y'' - \frac{1}{x}y' - y' + \frac{1}{x}y = x$, $y'(0) = y''(0) = -2$ **Ledning**: Faktorisering, **c**) begynnelsevärdesproblemet $y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0$, $y(0) = y'(0) = 2$. (6p)

(5p)

7. Betrakta fourierserien för en 2π-periodisk funktion på $\mathbb{R}$ som är två gånger kontinuerligt deriverbar. Uppgiften är att visa att fourierserien konvegerar i varje punkt $x \in \mathbb{R}$. Vi ger för detta ändamål, olika deluppgifter nedan; som en vägledning. Man behöver bara visa att den konvegerar men inte att den konvegerar till $f(x)$ i punkten x. Fourierserien för f är $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ där $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ och $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$.

Vi vet ju att om en serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvegerar (i vårt fall för ett fixt, godtyckligt x i fourierserien) så går termerna mot 0 då k ökar (se del b) i uppgift 8 nedan). Vi vet ju också att om omvänt termerna c_k i en serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ går mot noll, $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$, så medför det inte nödvändigtvis att serien $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvegerar; som ju den divergenta serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ visar. Om man däremot kan visa att termerna c_k i en serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ går mot noll tillräckligt fort då $k \to \infty$ så är serien $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent.

Deluppgift: **a**) Visa att för Fourierkoefficienterna a_k gäller $|a_k| \leq \frac{C}{k^2}$ där C ej beror på k (för b_k gäller detsamma men det behöver inte bevisas här utan det förutsätter vi). **Ledning:** Partialintegration (två gånger).

b) Använd resultatet i **a**) för att med relevanta konvergensresultat och jämförelsekriterier, bevisa att Fourierserien är konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$. **Ledning:** Jämförelsekriterierna förutsätter positiva termer men termerna i Fourierserien är inte alltid positiva för för ett givet x; motiverande argument, satser, runt detta krävs.

8. **a**) Formulera och bevisa formeln för partiell integration, **b**) Visa att för termerna a_k i en konvergent serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gäller $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. (6p)

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$