MATEMATIK Tentamen Matematisk analys i en variabel för E1, (TMV137, 136)
Chalmers Tid: 2018-04-04, kl 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare. Telefonvakt: Mattias Lennartsson, ankn. 5325.

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad. Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 p eller mer betyget 5. (Bonuspoäng från läsåret 1718 inkluderas.) Lösningar läggs ut på kursens webbsida efter tentamen. Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.
Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv137/1718/

---

1. Beräkna integralerna i a) - f) samt avgör om integralen i g) är konvergent eller divergent: **a)** $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$, **b)** $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$, **c)** $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$, **d)** $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$, **e)** $\int \frac{1}{x+x^2}\,dx$, **f)** $\int_0^{\pi/2} xe^x\,dx$, **g)** $\int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+x^3}}\,dx$. (9p)

2. a) Lös om möjligt följande ODE: a) $y' = \frac{2}{x}y + x^2$, b) $y' = 2xy^2$, c) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$. (6p)

3. Låt $f(x) = x^3$. Bestäm för $f(x)$, Maclaurinpolynomet av i) grad 2, ii) av grad 4, iii) beräkna om möjligt $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{(1-\cos x)^2}$. (6p)

4. Lös följande två ekvationer: a) $y''+y'-2y = e^{-x}$, b) $y''+y'-2y = e^x$. (6p)

5. Bestäm alla kontinuerliga funktioner $y(x)$ sådana att $y(x) = 1 + \int_0^x ty(t)\,dt$, $x \geq 0$. (6p)

6. Bestäm volymen av en boll i $\mathbf{R}^3$ med radie r och bevisa ditt påstående. (6p)

7. Beräkna $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x+1)|\tan x|\,dx$. (6p)

8. **a**) Formulera och bevisa formeln för partiell integration, **b**) Visa att för termerna a_k i en konvergent serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gäller $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. (5p)

Maclaurinutvecklingar på baksidan, vgv.

VA

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$