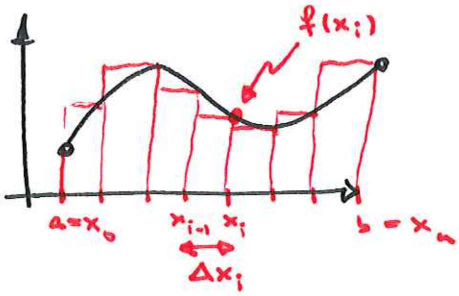
4/11-2015

Föreläsning 2

Idag:
- Riemannsummor
- Definitionen av integral och egenskaper för denna.

I gymn. beräknade vi areor under funktionsgrafer m.h.a. approximation och gränsövergång:



$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x_i}_{(*)}$$

~~Skillnaderna~~ Bredderna Δx_i behövde ej vara lika och höjden på staplarna bestäms av högra ändpunkten x_i.

Konstruktionen (*) är inte den enda som skulle fungera!

Lite terminologi: En uppsättning punkter i ett int. ~~uppdelning av ett intervall~~ $[a,b]$, säg $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, kallas för en partition av $[a,b]$. Man skriver

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

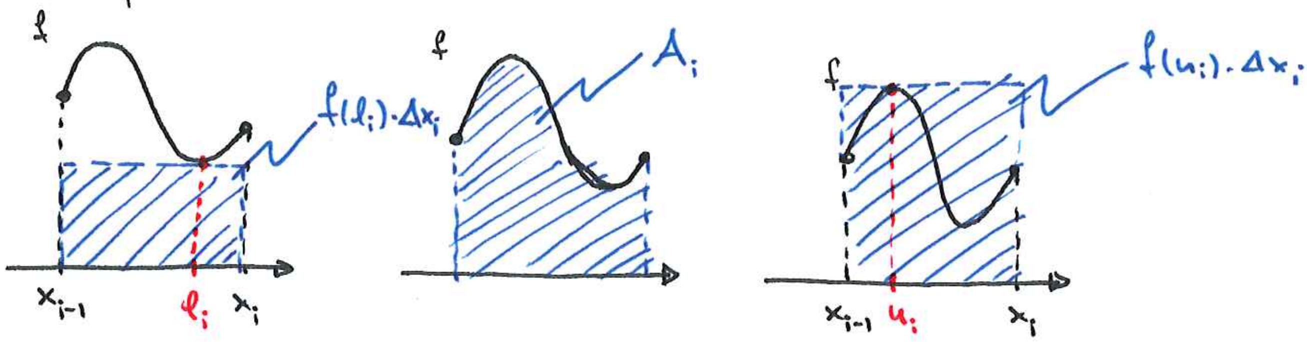
P ger n st. delintervall av $[a,b]$, nämligen alla $[x_{i-1}, x_i]$ $i=1,\dots,n$, och n st. motsv. intervallbredder $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Den största av dessa bredder, dvs. $\max_{1\le i\le n} \Delta x_i$, kallas för <u>normen</u> av partitionen P och man skriver

$$\|P\| = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i .$$

Antag nu att f är en kont. funktion def. på $[a,b]$ och låt P vara en partition av $[a,b]$. Eftersom f kont. på varje delint. $[x_{i-1}, x_i]$ så vet vi att det finns en punkt $l_i \in [x_{i-1}, x_i]$ där f är som minst i $[x_{i-1}, x_i]$ och en där f är som störst, säg u_i.

<u>Två staplar:</u>



M.h.a. l_i och u_i kan vi beräkna arean av den minsta möjliga samt den största möjliga stapeln som approximerar A_i. Det är klart att:

$$f(l_i)\cdot\Delta x_i \le A_i \le f(u_i)\cdot\Delta x_i .$$

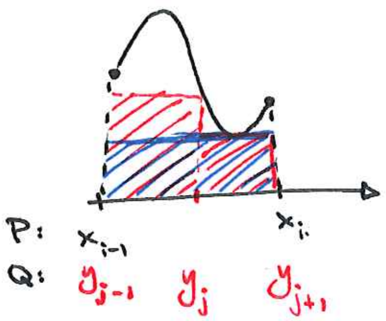
<u>OBS:</u> Arean räknas här som negativ om funktionen ligger under x-axeln.

Definition: Givet en kont. funktion f, ett intervall $[a,b]$ och en partition P av detta definierar vi den nedre- och övre Riemannsumman, $L(f,P)$ och $U(f,P)$, som:

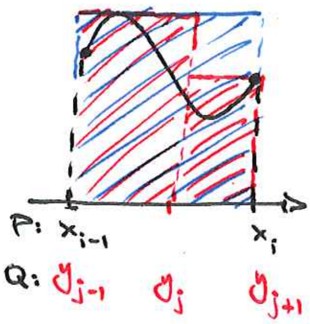
$$L(f,P) = f(l_1)\cdot\Delta x_1 + \dots + f(l_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i$$

$$U(f,P) = f(u_1)\Delta x_1 + \dots + f(u_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i.$$

Det är klart att $L(f,P) \leq U(f,P)$ för alla partitioner P. Vad händer med dessa om vi förfiner partitionen P till partitionen Q?



Arean ökar med förfined part.!



Arean minskar med förfined part.

Alltså: Om Q är en förfiningen av P så gäller

$$L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,P).$$

Slutsats: L och U närmar sig varandra med finare och finare partitioner!

Kan vi definiera betydelsen av integralen av f mellan a och b!

__Definition:__ Antag att det finns precis __ett__ tal I s.a. det för varje part. P av $[a,b]$ gäller att

$$L(f,P) \le I \le U(f,P).$$

Vi säger då att f är __integrerbar__ och talet I kallas den __definita integralen__ av f på $[a,b]$.

Man skriver då $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

integrationsvariabel

integrand

integrationsgränser

Observera att namnet på integrationsvariabeln är helt oväsentligt!

Vilka funktioner är integrerbara?

Nästan alla! Speciellt alla kontinuerliga funktioner.

__Ex:__ Beräkna $L(f,P_n)$ och $U(f,P_n)$ för ~~given~~ ~~funktion~~ $f(x)=e^x$ över $[0,3]$ där P_n är part. med n st. lika långa delintervall.

Visa att $\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n)$.

__Lösning:__ I P_n gäller det att $\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$

$$\rightarrow \quad x_i = 0 + \frac{i}{n}(3-0) = \frac{3i}{n}$$

Vidare vet vi att $f(x) = e^x$ är en växande funktion. Över $[x_{i-1}, x_i]$ gäller därför att

$$l_i = x_{i-1} \quad \text{och} \quad u_i = x_i$$

Vi får:
$$L(e^x, P_n) = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{3(i-1)}{n}} \cdot \frac{3}{n} = \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{3(i-1)}{n}}$$

$$U(e^x, P_n) = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{3i}{n}} \cdot \frac{3}{n} = \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{3i}{n}}$$

$$\Rightarrow U(e^x, P_n) - L(e^x, P_n) = \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{3i}{n}} - e^{\frac{3(i-1)}{n}} =$$

$$= \frac{3}{n} \cdot \underbrace{\left[\left(\cancel{e^{\frac{3}{n}}} - e^0\right) + \left(\cancel{e^{\frac{2 \cdot 3}{n}}} - \cancel{e^{\frac{3}{n}}}\right) + \left(\cancel{e^{\frac{3 \cdot 3}{n}}} - \cancel{e^{\frac{2 \cdot 3}{n}}}\right) + \ldots + \left(e^{\frac{3n}{n}} - \cancel{e^{\frac{3(n-1)}{n}}}\right) \right]}_{\text{Teleskoperande summa!}}$$

$$= \frac{3}{n} \cdot \left(e^{\frac{3n}{n}} - e^0\right) = \frac{3}{n}(e^3 - 1) \longrightarrow 0 \text{ då } n \to \infty$$

dvs. $\lim_{n \to \infty} L(e^x, P_n) = \lim_{n \to \infty} U(e^x, P_n)$!

$\square$

<u>Några viktiga egenskaper för definita integraler:</u>

(i) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (självklart!)

(ii) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, eftersom integration från b till a ändrar Δx_i från $x_i - x_{i-1}$ till $x_{i-1} - x_i = -(x_i - x_{i-1})$.

(iii) $\displaystyle\int_a^b Af(x) + Bg(x)\, dx = A\int_a^b f(x)\, dx + B\int_a^b g(x)\, dx$, eftersom summorna $L(f,P)$ och $U(f,P)$ alltid uppfyller detta!

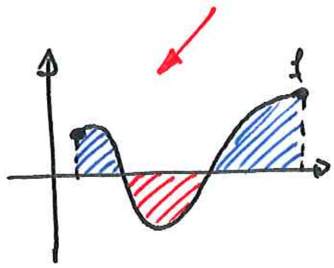
(iv) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$, eftersom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} + \sum_{i=n+1}^{N} = \sum_{i=1}^{N}$.

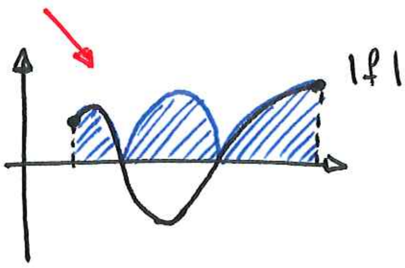
(v) Om $a \leq b$ och $f(x) \leq g(x)$ för <u>alla</u> $a \leq x \leq b$ så

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx,$$

(vi) Triangelolikheten för integraler: $(a \leq b)$

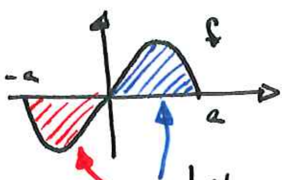
$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$





(vii) Om f är udda (dvs. $f(-x) = -f(x)$) så är

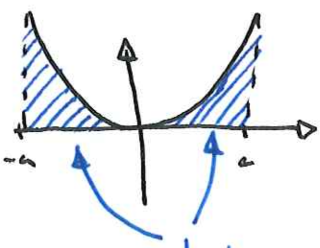
$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0,$$



Lika stora, olika tecken.

(viii) Om f är jämn (dvs. $f(-x) = f(x)$) så är

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\, dx$$



Lika stora.