2/11 - 2015.

Föreläsning 1

Idag:
- Summor och sigmanotation
- Approx. av area under graf.

I matematik behöver man ofta jobba med summor av olika slag:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \text{där } a_1, \dots, a_n \text{ tal}$$

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n, \quad \text{där } f_1, \dots, f_n \text{ funktioner}$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n, \quad \text{där } v_1, \dots, v_n \text{ vektorer}$$

osv. Behöver smart notation för att smidigt kunna jobba med summor.

Lösning: Sigmanotation!

Man skriver

$$a_1 + a_2 + \dots a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

i kallas för summationsindex. För att skriva en summa m.h.a. sigmanotation måste man hitta relation mellan termerna i summan och summationsindex.

T.ex. $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 20^{20} = \sum_{i=?}^{?} ? \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{20} i^i$

a_i	1^1	2^2	3^3	$\dots$	20^{20}
i	1	2	3		20

$\rightsquigarrow a_i = i^i$

Notera: Summationsindex behöver inte börja på 1.

Ex: $2^3 + 3^4 + 4^5 + \ldots + 9^{10} = ?$ $\rightsquigarrow \sum_{i=2}^{9} i^{(i+1)}$

a_i	2^3	3^4	4^5	$\ldots$	9^{10}
i	2	3	4	$\ldots$	9
	3	4	5	$\ldots$	10

$\rightsquigarrow a_i = i^{(i+1)}$

$\rightsquigarrow a_i = (i-1)^i \Rightarrow \sum_{i=3}^{10} (i-1)^i$

Ibland kan det vara bra att byta från ett summationsindex till ett annat.

Ex: Skriv $\sum_{i=1}^{10} i^2 + \sum_{j=-3}^{4} (j+6)^2$ med ett summatecken.

Lösning: Byt index i andra summan enl. $k = j+6$ s.a. $j=-3 \Rightarrow k=3$ och $j=4 \Rightarrow k=10$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{10} i^2 + \sum_{j=-3}^{4} (j+6)^2 = \sum_{i=1}^{10} i^2 + \sum_{k=3}^{10} k^2 = \{\text{byt namn } k \rightsquigarrow i\}$$

$$= \sum_{i=1}^{10} i^2 + \sum_{i=3}^{10} i^2 = 1^2 + 2^2 + \sum_{i=3}^{10} i^2 + \sum_{i=3}^{10} i^2 = 5 + 2 \cdot \sum_{i=3}^{10} i^2.$$

$\square$

Några viktiga typer av summor och hur dom beräknas:

(i) $\sum_{i=1}^{n} 1 = \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{n \text{ st.}} = n$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} (a + (i-1)d) = a \cdot n + \frac{n \cdot (n-1) \cdot d}{2}$ (aritmetisk summa)

(iii) $\sum_{i=0}^{n-1} a \cdot q^i = \underbrace{a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$ (geometrisk summa)

$\longrightarrow \frac{a}{1-q}$ om. $-1<q<1$ (geom serie)

(iv) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}.$

Ex: Betrakta polynomet $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 100 \cdot x^{99}$ och hitta en formel för att beräkna $p(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Lösning:

Vi har att $p(x) = \sum_{i=1}^{100} i \cdot x^{i-1}$.

Observera att $q(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{100} = 1 + \sum_{i=1}^{100} x^i$

har $q'(x) = \sum_{i=1}^{100} i \cdot x^{i-1} = p(x)$. Vidare är $q(x)$ en geom. summa med $a = 1$ och $q = x$ så:

$$q(x) = 1 \cdot \frac{1 - x^{101}}{1 - x}, \quad x \neq 1.$$

$$\rightarrow \quad p(x) = q'(x) = \frac{-101 \cdot x^{100} \cdot (1-x) - (1 - x^{101}) \cdot (-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{100 \cdot x^{101} - 101 \cdot x^{100} + 1}{(1-x)^2}, \quad x \neq 1.$$

Vad händer om $x = 1$?

$\rightarrow \quad p(1) = 1 + 2 + \ldots + 100 = \{$aritm. summa med $a = 1$ och $d = 1\} =$

$$= 1 \cdot 100 + \frac{100 \cdot 99 \cdot 1}{2} = 100 + 50 \cdot 99 = 5050$$

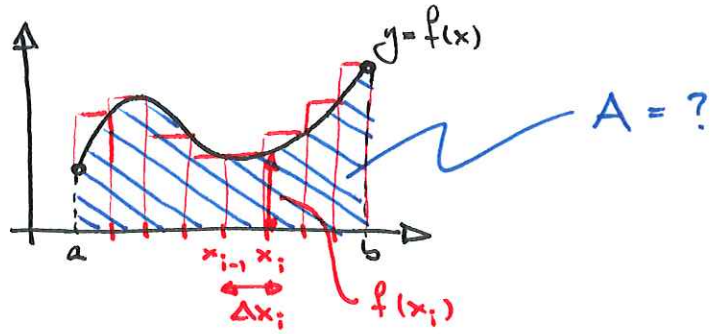
Svar:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{100 \cdot x^{101} - 101 \cdot x^{100} + 1}{(1-x)^2}, & x \neq 1 \\ 5050, & x = 1 \end{cases}$$

$\square$

Approximation av area under graf:

Givet funktion $y = f(x)$ vill vi beräkna arean under dess graf:



Idé: Approximera arean m.h.a. staplar.

Dela upp intervallet $[a,b]$ i smäintervall $[x_{i-1}, x_i]$ s.a.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Beteckna dessa smäintervalls längder $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (dom behöver inte vara lika långa!)

Tot. arean av staplarna blir med denna konstruktion

$$S_n = f(x_1)\cdot\Delta x_1 + f(x_2)\cdot\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\cdot\Delta x_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x_i .$$

Med tillräckligt många tunna staplar måste

$$S_n \approx A.$$

Approx. blir bättre ju fler och tunnare staplar vi har! Det är därför rimligt att anta att

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n$$

Bredden av bredaste int. går mot 0.

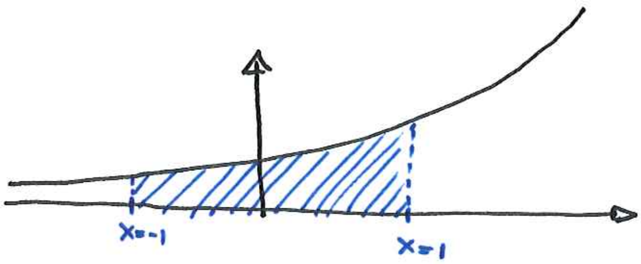
Notera: om alla småintervall är lika långa, dvs

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

så gäller att $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$.

Ex: Beräkna arean under $y = 2^x$ från $x=-1$ till $x=1$.

Lösning:



Dela in $[-1, 1]$ i n st. lika långa delintervall och sätt upp summan S_n!

$$\Delta x = \frac{1-(-1)}{n} = \frac{2}{n} \rightsquigarrow x_i = -1 + \frac{i}{n}\cdot 2$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{\cancel{-1}+\frac{2i}{n}} \cdot \frac{\cancel{2}}{n} = \frac{1}{n}\cdot \sum_{i=\cancel{1}0}^{n} (4^{1/n})^i - \frac{1}{n} = \{\text{geom. summa}\}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot \frac{1-(4^{1/n})^{n+1}}{1-4^{1/n}} - \frac{1}{n} = \frac{1-4\cdot 4^{1/n}}{n\cdot(1-4^{1/n})} - \frac{1}{n} \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-4\cdot 4^x}{\frac{1}{x}\cdot(1-4^x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(1-4\cdot 4^x)}{1-4^x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(1-4\cdot e^{x\ln 4})}{1-e^{x\ln 4}}$$

$$= \{\text{l'Hospital}\} = \frac{1-4e^{x\ln 4} + x\cdot(-4\ln 4\, e^{x\ln 4})}{-\ln 4\, e^{x\ln 4}} \to 0$$

$$= \frac{4}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 4} = \underline{\underline{\frac{3}{\ln 4}}}$$

□