Föreläsning 6

11/11 - 2015

Idag:
- Partialbråksuppdelning
- Inversa substitutioner

Problem: Vill beräkna integral av typen

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx,$$

där $p(x)$, $q(x)$ är polynom. (dvs. $\frac{p(x)}{q(x)}$ rationell funktion)

Ex: Beräkna $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^3+4x^2+x-6}\,dx.$

Lösning: Eftersom täljaren har högre grad än nämnaren så kan vi anv. polynomdivision!

$$\begin{array}{l}
\quad x-4 \\
\hline
\cancel{x^4} - 1 \quad \big| \; x^3+4x^2+x-6 \\
-x\cdot(x^3+4x^2+x-6) \\
\hline
\quad -4\cancel{x^3} - x^2 + 6x \\
\quad -(-4)\cdot(\cancel{x^3}+4x^2+x-6) \\
\hline
\qquad 16x^2+4x-24 \qquad \text{Stopp!}
\end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4-1}{x^3+4x^2+x-6} = (x-4) + \frac{16x^2+4x-24}{x^3+4x^2+x-6}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^4-1}{x^3+4x^2+x-6}\,dx = \int (x-4) + \frac{16x^2+4x-24}{x^3+4x^2+x-6}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \underbrace{\int \frac{16x^2+4x-24}{x^3+4x^2+x-6}\,dx}_{=\,?}$$

Polynomdiv. hjälper inte här!

Nytt problem: Vill beräkna integral av typen

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

där $p(x)$, $q(x)$ polynom s.a. graden av p är mindre än graden av q.

Lösning: Metoden med partialbråksuppdelning!

Antag att vi vet alla nollställen (rötter) till $q(x)$ och att alla dessa är distinkta. Kalla dem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (så graden av q är här n).

$$\Rightarrow \quad \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)\cdot C}$$

(ev. konst. C)

Då går det alltid att göra följande omskrivning:

$$\frac{p(x)}{(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

där $A_1, \ldots, A_n$ är konstanter som måste beräknas.

Varför går detta?

Därför att man alltid kommer kunna beräkna alla A_i genom formeln:

$$A_i = \lim_{x \to a_i} (x-a_i)\cdot\frac{p(x)}{q(x)} =$$

$$= \frac{p(a_i)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdot\ldots\cdot(a_i-a_n)} \quad (*)$$

(*) beräknas lätt m.h.a. "handpåläggningsmetoden"!

Poängen med partialbråksuppd. är att alla termer $\dfrac{A_i}{x-a_i}$ är enkla att integrera!

Ex: Beräkna $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx$.

Lösning: Täljarens grad är lägre än nämnarens

$\Rightarrow$ partialbråksuppdelning

$$\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx = \int \frac{x-2}{x\cdot(x+1)}\,dx =$$

$$= \left\{ \frac{x-2}{x\cdot(x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} \overset{\text{H.P.}}{\Rightarrow} A_1 = -2,\ A_2 = 3 \right\} =$$

$$= \int \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x}\,dx = 3\ln|x+1| - 2\ln|x| + C.$$

$\square$

Ex: Beräkna $\displaystyle\int \frac{x}{9x^2+6x+2}\,dx$.

Lösning: Partialbråksuppdelning! Börja med att faktorisera nämnaren, dvs. hitta nollställen.

$$9x^2+6x+2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{2}{9}} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{-\frac{1}{9}} \quad ?!?$$

Saknar reella nollställen! Hur göra?

(i) Vad händer om vi inte kan skriva $q(x)$ som en faktorisering enl. $(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$?

(ii) Och vad händer om q har dubbelrötter, trippelrötter osv s.a. $q(x) = (x-a_1)^{m_1}\cdot(x-a_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{m_n}$ där $m_1+m_2+\ldots+m_n = n$ (graden av q) ?

Dessa fall går att lösa med partialbråk, men det är jobbigare. I allmänhet; om vi har

$$q(x) = C\cdot(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_j)^{m_j}\cdot$$

Typ (ii)

$$\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+b_kx+c_k)^{n_k}$$

Typ (i) (dvs. andragradsfaktorer <u>utan</u> reella nollställen)

där $m_1+m_2+\ldots+m_j+2n_1+\ldots+2n_k = n$ (graden på q) så ansätter man partialbråk enl. följande recept:

(a) ~~Termer~~ Faktorer av typ $(x-a)^m$ ger upphov till:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(x-a)^m}$$ (går att integrera!)

i part.bråksansatsen.

(b) Faktorer av typ $(x^2+bx+c)^n$ ger upphov till

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}$$ (går att integrera!)

i part.bråksansatsen.

Handpåläggningsmetoden fungerar bara då alla faktorer i $q(x)$ är av typen $(x-a)^m$ och $m=1$.
För att hitta alla A_k, B_k och C_k om H.P. inte funkar måste man skriva part.bråksansatsen på gemensamt bråkstreck och identifiera koefficienter.

Ex: Beräkna $\int \frac{dx}{x^3+9x}$

Lösning:

$$\int \frac{dx}{x^3+9x} = \int \frac{dx}{x\cdot(x^2+9)} = \{ x^2+9 \text{ saknar reella rötter}$$

$\rightarrow$ part. bråk! $\frac{1}{x\cdot(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9} =$

$$= \frac{A\cdot(x^2+9) + x\cdot(Bx+C)}{x\cdot(x^2+9)} = \frac{(A+B)x^2 + C\cdot x + 9A}{x\cdot(x^2+9)}$$

Identifiering av koeff. ger: $\left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ C=0 \\ 9A=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow A=\frac{1}{9},\ B=-\frac{1}{9},\ C=0$

$$= \int \frac{1/9}{x} + \frac{(-1/9)\cdot x}{x^2+9}\, dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{9}\int \frac{x}{x^2+9}\, dx =$$

$$= \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{9}\ln(x^2+9)\cdot\frac{1}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{9}\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} + C \quad \square$$

Inversa substitutioner: (specialsubstitutioner)

Typfallet för variabelsubstitution var fallet

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \xrightarrow[g(x)=t]{} \int f(t)\,dt$$

Här är alltså " t = funktion av x ".
Inversa substitutioner går åt andra hållet och sätter istället " x = funktion av t ", så att

$$\int f(x)\,dx \xrightarrow[dx=g'(t)\,dt]{x=g(t)} \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

Ser inte ut som en lovande metod, men är oerhört effektivt ibland!
Ett första exempel är:

Ex: Beräkna $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ för $a>0$

Lösning: Substitutionen $x=a\sin\theta$ löser detta!

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x=a\sin\theta \\ dx=a\cos\theta\,d\theta \end{array}\right\} = \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\,a\cos\theta\,d\theta$$

$$= \{a>0\} = \int a\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta = \{\text{Trig. ettan}\} =$$

$$= \int a^2\sqrt{\cos^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow -a\le x\le a \\ \Rightarrow -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \cos\theta\ge 0 \end{array}\right\}$$

$$= \int a^2\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta = \int a^2\cdot\frac{\cos 2\theta+1}{2}\,d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin 2\theta}{2}+\theta\right)+C$$

$$= \left\{\theta=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = \frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{\sin(2\arcsin\frac{x}{a})}{2}+\arcsin\frac{x}{a}\right)+C \quad \square$$