5/11 - 2015

Föreläsning 3

Idag:
- Medelvärdessatsen för integraler
- Analysens huvudsats.

Antag att f är en funktion (kont.) över int. $[a,b]$.
Vad är medelvärdet, $\bar{f}$, av f ?
Borde vara något i stil med följande:
Låt P_n vara en partition av $[a,b]$ i ekvidistanta punkter $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Då borde

$$\bar{f} \approx \frac{f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} = \frac{(f(x_0)+\ldots+f(x_n))\cdot \Delta x}{n\cdot \Delta x}$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x}{b-a} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Alltså är det rimligt att definiera medelvärdet av f som

$$\boxed{\bar{f} = \frac{1}{b-a}\cdot \int_a^b f(x)\,dx}$$

M.V.S. för integraler säger att det finns en punkt $x=c$ mellan a och b där f antar sitt eget medelvärde.

Sats: Om f är kont. på $[a,b]$ så finns det en punkt $c \in [a,b]$ s.a.

$$f(c) = \bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Bevis: Eftersom f kont. på $[a,b]$ så antas minimalt och maximalt värde av f, m och M, någonstans i $[a,b]$, säg i $x=\ell$ och $x=u$.

Det gäller alltså att

$$m = f(\ell) \leq f(x) \leq f(u) = M$$

för alla $x \in [a,b]$. Vidare, om P är part. av $[a,b]$ i två punkter, dvs. $x_0 = a$ och $x_1 = b$, så gäller

$$m(b-a) = L(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(f,P) = M\cdot(b-a)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f(\ell) = m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M = f(u)$$

Eftersom f kont. ger satsen om mellanliggande värden att f antar alla värden mellan $f(\ell)$ och $f(u)$. Speciellt finns alltså en punkt $c \in [a,b]$ s.a.

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

$\square$

Ex: Bestäm det tal $k \in \mathbb{R}$ som minimerar integralen

$$\int_a^b (f(x)-k)^2\,dx.$$

Lösning: Börja med att skriva om!

$$\int_a^b (f(x)-k)^2\,dx = \int_a^b f^2(x) - 2f(x)k + k^2\,dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - 2k\int_a^b f(x)\,dx + k^2 \underbrace{\int_a^b dx}_{=b-a} \quad (*)$$

Notera att $\int_a^b f^2(x)\,dx$ och $\int_a^b f(x)\,dx$ är konst, kalla dem A och B. Kan se (*) som en funktion av k enligt:

$$g(k) = A - 2Bk + k^2 \cdot (b-a)$$

Vilket k minimerar g? Derivera och kolla kritiska punkter!

$$g'(k) = 2k(b-a) - 2B = 0 \iff k = B/(b-a) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(Medelvärdet!)

Klart att $g(k) \to \infty$ då $k \to \pm\infty$ så detta måste vara en minpunkt.

<u>Svar:</u> $\int_a^b (f(x)-k)^2\,dx$ är minimal då k är medelvärdet av f, dvs. $k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

<u>Analysens huvudsats:</u>

<u>Sats:</u> Antag f kont. på int. I som innehåller punkten a. Då gäller:

(i) Om $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ så är F deriverbar på I och $F'(x) = f(x)$, dvs. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ på I.

(ii) Om $G(x)$ är en <u>primitiv funktion</u> till $f(x)$ på I, dvs. $G'(x) = f(x)$, så är

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \quad , \; b \in I.$$

Huvudsatsen ger oss två bra insikter:

(i) Derivata och integral är varandras "motsatser"!

$$\cancel{\frac{d}{dx}} \cancel{\int_a^x} f(t)\, \cancel{dt} = f(x)$$

$$\left(\cancel{\int_a^b} \cancel{\frac{d}{dx}} G(x)\, \cancel{dx} = G(b) - G(a) \right)$$

(ii) En uträkningsformel för definita integraler!

<u>Bevis:</u>

(i) Betrakta differenskvoten av F i x:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt}_{\substack{\text{medelv. av } f \\ \text{över } [x,\, x+h].}} = \{ \text{M.V.S. för int.} \Rightarrow c \in [x, x+h] \}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(c) = \{ h \to 0 \Rightarrow c \to x \} = \lim_{c \to x} f(c) =$$

$$= \{ f \text{ kont.} \} = f(x) \qquad \text{OK!}$$

så derivatan existerar och är lika med $f(x)$.

(ii) Eftersom $F'(x) = f(x)$ av (i) (dvs. $F(x)$ primitiv fnk) och $G(x)$ är primitiv funktion så måste

$$F'(x) = f(x) = G'(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + C, \quad C \text{ konst. (okänd)}$$

och alltså

$$\int_a^x f(x)\, dx = F(x) = G(x) + C.$$

Om vi sätter $x = a$ får vi att

$$0 = G(a) + C \iff C = -G(a)$$

och därmed gäller för $x = b$ att

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) + C = G(b) - G(a) \qquad \text{OK!}$$

$\square$

<u>Lite notation:</u>

a) Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ skriver man $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b \; (= F(b) - F(a))$

b) Alla integraler av typen $\int_a^x f(t)\,dt$, a konst., utgör primitiva funktioner till f enl. (i). Dom skiljer sig åt m.a.p. konstant.
Allmänt skriver man alla primitiva funktioner till $f(x)$ som $\int f(x)\,dx$, dvs. utan int.gränser.
Kallas <u>indefinit integral</u>. (eller <u>obestämd</u> integral)

<u>Ex:</u> Beräkna $\int_1^2 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{x^3}{2}\right) dx$.

<u>Lösning:</u> Hitta primitiv till $\frac{2}{x^3} - \frac{x^3}{2}$!

Vet att: $F_1(x) = \frac{1}{x^2} \cdot (-1) = -\frac{1}{x^2}$ är primitiv till $\frac{2}{x^3}$

$F_2(x) = x^4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x^4}{8}$ är primitiv till $\frac{x^3}{2}$

$\rightarrow$ $F_1(x) - F_2(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{x^4}{8}$ är primitiv till $\frac{2}{x^3} - \frac{x^3}{2}$

Alltså är

$$\int_1^2 \frac{2}{x^3} - \frac{x^3}{2}\,dx = \left[-\frac{1}{x^2} - \frac{x^4}{8}\right]_1^2 = \left(-\cancel{\frac{1}{4}}\frac{2}{8} - \frac{16}{8}\right) - \left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{8}\right) =$$

$$= -\frac{18}{8} + 1 + \frac{1}{8} = \frac{8+1-18}{8} = \underline{\underline{-\frac{9}{8}}}$$

□

<u>Ex:</u> Beräkna $\frac{d}{dx}\left(x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,du\right)$

<u>Lösning:</u> Använd produktregeln + analysens huvudsats!

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,du\right) = 2x \cdot \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,du + x^2 \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,du\right)}_{=\,?} =$$

Sätt $F(x) = \int_0^{x} \frac{\sin u}{u}\,du$. Då är $F(x^2) = \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,du$!

$$= 2x \cdot \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,du + x^2 \frac{d}{dx} F(x^2) = \{\text{kedjeregeln}\} =$$

$$= 2x \cdot \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,du + x^2 \cdot F'(x^2) \cdot 2x = \left\{ F'(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ av}\right.$$

$$\left.\text{analysens huvudsats} \Rightarrow F'(x^2) = \frac{\sin x^2}{x^2} \right\} =$$

$$= 2x \cdot \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,du + \cancel{x^2} \cdot \frac{\sin x^2}{\cancel{x^2}} \cdot 2x = \underline{\underline{2x \cdot \left(\sin x^2 + \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,du\right)}}$$

□