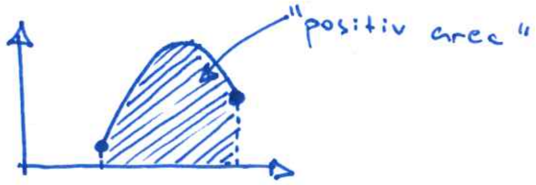
<u>Föreläsning 5</u>

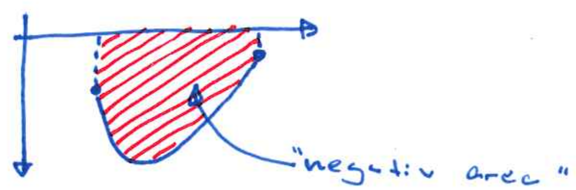
9/11 -2015

<u>Idag:</u>
- Areor av plana områden
- Partiell integration

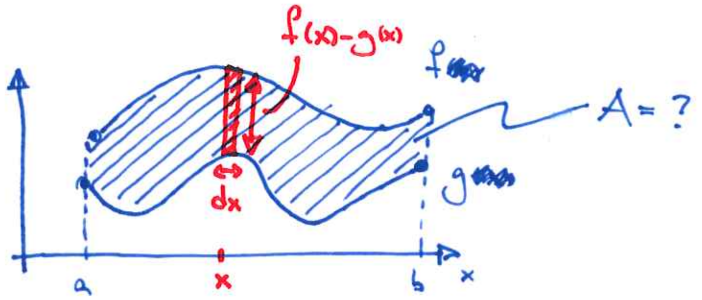
Förra veckan lärde vi oss att

$$\int f(x)\,dx = \text{"arean under grafen till } f(x) \text{ räknat med tecken"}$$





Kan dock använda integralbegreppet för att beräkna arean av mer komplicerade områden, t.ex. mellan två grafer:



Kalla arean av en tunn stapel mellan f och g för dA. Då gäller att

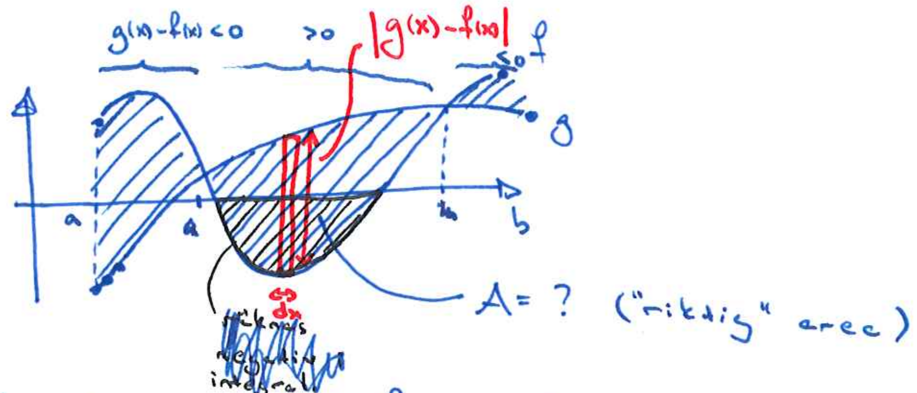
$$dA = (f(x) - g(x))\,dx.$$

Tot. arean ges som summan av alla dessa <u>areaelement</u>, dvs.

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx.$$

Hur tar man hänsyn till tecken om så behövs?

T.ex.

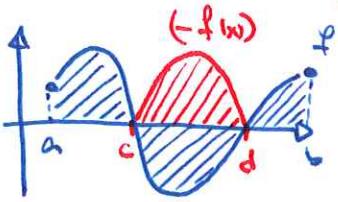


Här är det klart att $\int g(x)-f(x)\,dx \neq A$ eftersom integralen tar hänsyn till tecken ~~då grafen ligger under x-axeln~~. Försök förstå vad dA blir!

Vi får areaelementet $dA = |g(x)-f(x)|\,dx = |f(x)-g(x)|\,dx$ och alltså att

$$A = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx.$$

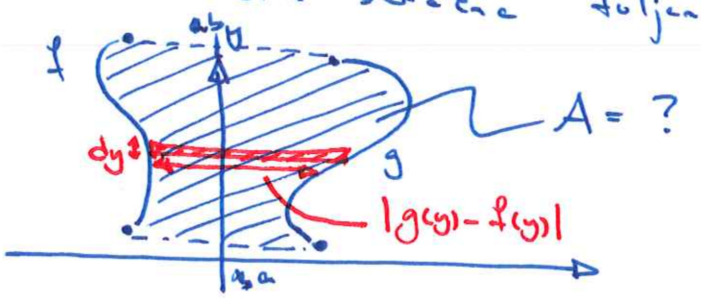
Kan ibland vara lättare att beräkna A "bitvis" och hålla reda på tecknet själv. T.ex.



$$\Rightarrow A = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\text{eller } A = \int_a^c f(x)\,dx \underbrace{- \int_c^d f(x)\,dx}_{= \int_c^d (-f(x))\,dx} + \int_d^b f(x)\,dx$$

Hur blir det om vi vill beräkna följande area A?



Här är f och g uppenbarligen <u>inte</u> funktioner AV x! Däremot är dom funktioner av y dvs. $x = f(y)$ och $x = g(y)$.

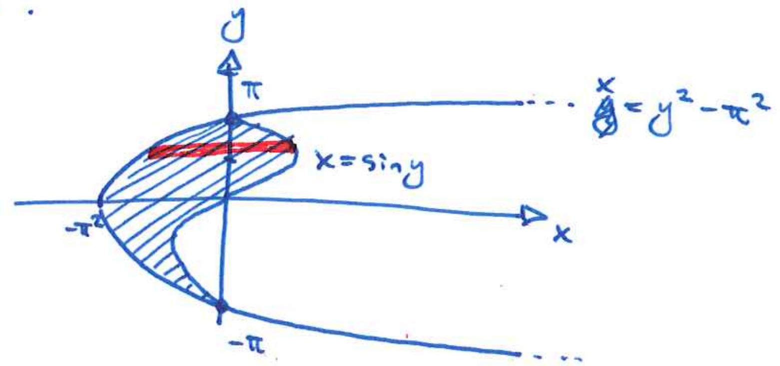
Kan använda horisontella areaelement ist. för vertikala! Får då att:

$$dA = |f(y) - g(y)|\,dy \quad \to \quad A = \int_a^b |f(y) - g(y)|\,dy$$

Ex: Beräkna arean som begränsas av kurvorna

$$x = y^2 - \pi^2 \quad \text{och} \quad x = \sin y$$

Lösning: Rita!



Ur bilden ser vi att kurvan $x = \sin y$ alltid ligger över kurvan $x = y^2 - \pi^2$ (i x-led!).
Kan alltså sätta ett horisontellt areaelement som:

$$dA = \underbrace{(\sin y - (y^2 - \pi^2))}_{\geq 0\ (!)} \cdot dy$$

Alltså kan totala arean beräknas som:

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin y - (y^2 - \pi^2))\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} \sin y - y^2 + \pi^2\,dy =$$

$$= \left[-\cos y - \frac{y^3}{3} + \pi^2 y\right]_{-\pi}^{\pi} = \left(\cancel{-(-1)} - \frac{\pi^3}{3} + \pi^3\right) - \left(\cancel{-(-1)} + \frac{\pi^3}{3} - \pi^3\right)$$

$$= 2\pi^3 - \frac{2\pi^3}{3} = \underline{\frac{4\pi^3}{3}} \quad \square$$

Partiell integration:

En utav de viktigaste metoderna för att beräkna integraler! Idén är att använda ~~kedjeregeln~~ produktregeln på ett klurigt sätt.

Ex: Beräkna integralen $\int x\cdot\cos x \, dx$.

Lösning:

M.h.a. kedjeregeln så vet vi att

$$\frac{d}{dx}(x\cdot \cancel{\cos}\,\sin x) = 1\cdot\cos x + x\cdot \cancel{\sin}\,\cos x$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x\cdot\cos x = \frac{d}{dx}(x\cdot\sin x) - \cos x$$

Alltså har vi att

$$\int x\cdot\cos x\,dx = \int \frac{d}{dx}(x\cdot\sin x) - \cos x\,dx =$$

$$= \underbrace{\int \frac{d}{dx}(x\cdot\sin x)\,dx}_{=\text{"primitiv funktion till } \frac{d}{dx}(x\cdot\sin x)\text{"}} - \int \cos x\,dx =$$

$$= x\cdot\sin x + C - \sin x + D = (x-1)\cdot\sin x + E.$$

$\square$

Metoden i exemplet fungerar givetvis även mer generellt.

Antag att f och g är två funktioner s.a. F är en primitiv funktion till f och g är deriverbar och att vi vill beräkna integralen:

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx.$$

Eftersom F är primitiv till f och g är deriverbar har vi av ~~kedjeregeln~~ produktregeln att

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{d}{dx}(F(x))\cdot g(x) = \{\text{kedjeregeln}\} =$$

$$= \frac{d}{dx}(F(x)\cdot g(x)) - F(x)\cdot g'(x).$$

Alltså gäller att

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}(F(x)\cdot g(x)) - F(x)\cdot g'(x)\,dx =$$

$$= \underbrace{\int \frac{d}{dx}(F(x)\cdot g(x))\,dx}_{=\text{"primitiv funktion av } \frac{d}{dx}(F(x)\cdot g(x))\text{"}} - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx =$$

$$= F(x)\cdot g(x) + C - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx = \{\text{bake in konst. } C \text{ i integralen!}\} =$$

$$= F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

och vi har fått följande tjusiga formel:

$$\boxed{\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

För definita integraler blir formeln för partiell integration

$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \Big[F(x)\cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b F(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

När ska man använda partiell integration?
Typfallet är när integranden är en produkt mellan två funktioner där den ena har känd primitiv funktion och den andra har en "bra" derivata!
Finns också andra trickartade fall.

Ex: Beräkna $\int (\arcsin x)^2\,dx$

Lösning:

$$\int (\arcsin x)^2\,dx = \int 1\cdot(\arcsin x)^2\,dx = \{\text{partiell integration}\} =$$

$$= x\cdot(\arcsin x)^2 \underbrace{- \int x\cdot 2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{= +2\cdot\int \arcsin x\,\cdot\,\frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx} = \{\text{partiell int.}\} =$$

$$= x\cdot(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}\;\underbrace{-\;2\cdot\int \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\cdot\cancel{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{= 2\cdot\int 1\,dx = 2x + C} =$$

$$= x\cdot(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x\sqrt{1-x^2} - 2x + C.$$

□