Föreläsning 4

6/11 - 2015

Idag: • Variabelsubstitution

Igår lärde vi oss genom analysens huvudsats bl.a. att:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

där $F(x)$ är en (av många) primitiv funktion till $f(x)$. Beräkna definita integraler handlar därför mycket om att hitta primitiva funktioner, eller, beräkna indefinita integraler:

Givet funktion f, beräkna $\int f(x)\,dx = F(x)$.

Ofta ett svårt problem (jämfört med att derivera), men finns ett antal metoder som kan komma väl till pass.

$\int f(x)\,dx \to$ Variabelsubstitution

$\int f(x)\,dx \to$ Partiell integration

$\int f(x)\,dx \to$ Partialbråksuppdelning

$\vdots$

Vi kommer att lära oss alla, men idag variabelsubstitution!

Variabelsubstitution:

Metoden utgår ifrån kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx}\Big(g(h(x))\Big) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

för två deriverbara funktioner g och h.

Antag att vi vill beräkna integralen

$$\int f(x)\,dx$$

och att vi kan identifiera funktioner $g(x)$ och $h(x)$ s.a. $f(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$. I så fall

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int g'(h(x))\,h'(x)\,dx = \{\text{kedjeregeln}\} =$$

$$= \int \frac{d}{dx}\Big(g(h(x))\Big)\,dx = \underbrace{g(h(x)) + C}_{\text{primitiv funktion till } \frac{d}{dx}(g(h(x)))}$$

I praktiken, givet f, "letar man" efter funktionen h ovan och byter integrationsvariabel m.h.a. denna:

$$\int g'(h(x)) \cdot h'(x)\,dx = \left\{ \text{sätt } u = h(x) \Rightarrow h'(x) = \frac{du}{dx} \Rightarrow du = h'(x)\,dx \right\} =$$

$$= \int g'(u)\,du = \{g \text{ primitiv till } g'\} = g(u) + C =$$

$$= g(h(x)) + C.$$

Ex: Beräkna $\int x^2 \cdot 2^{x^3+1}\,dx$

Lösning:

Ser att x^2 väsentligen är den inre derivatan av 2^{x^3+1}.

$$\int x^2 \cdot 2^{x^3+1}\,dx = \left\{ u = x^3+1 \,,\ \frac{du}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow \frac{du}{3} = x^2\,dx \right\}$$

$$= \int 2^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int 2^u\,du = \frac{1}{3}\int e^{u\ln 2}\,du =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{e^{u\ln 2}}{\ln 2} + C = \frac{2^u}{3\cdot\ln 2} + C = \frac{2^{x^3+1}}{3\cdot\ln 2} + C.$$

□

Ex: Beräkna $\int \frac{x^2}{2+x^6}\,dx$

Lösning: x^2 är väsentligen derivatan av x^3.

Pröva substitutionen $u = x^3$!

$$\int \frac{x^2}{2+x^6}\,dx = \left\{ u = x^3 \,,\ \frac{du}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow \frac{du}{3} = x^2\,dx \right\} =$$

$$= \int \frac{1}{2+u^2}\,\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2+u^2}\,du = \frac{1}{6}\int \frac{1}{1+\frac{u^2}{2}}\,du =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}\,du = \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{2} + C =$$

$$= \frac{\arctan\left(u/\sqrt{2}\right)}{3\sqrt{2}} + C.$$

□

Variabelsubstitution i definita integraler:

Metoden innan kan användas direkt i definita integraler enl. följande sats.

Sats: Antag att g är en deriverbar funktion på $[a,b]$ s.a. $g(a) = A$ och $g(b) = B$ och att f är en funktion som är kontinuerlig på R_g (dvs. g's värdemängd). Då gäller att

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_A^B f(u)\,du$$

(dvs. substitutionen $u = g(x)$).

Bevis: Antag att F är en primitiv funktion till f s.a. $F'(u) = f(u)$. Då gäller

$$\frac{d}{dx}\big(\underbrace{F(g(x))}_{\text{primitiv}}\big) = \{\text{kedj.reg.}\} = F'(g(x)) \cdot g'(x) = \{F' = f\} = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

och alltså

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \Big[F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) =$$

$$= F(B) - F(A) = \Big[F(u)\Big]_A^B = \int_A^B f(u)\,du.$$

$\square$

Ex: Beräkna $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x}\,dx$.

Lösning:

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x}\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \sin(\pi \ln x)\cdot \overbrace{\frac{1}{x}}^{=(\ln x)'}\,dx = \Big\{ u = \ln x,$$

$$du = \frac{1}{x}dx, \quad x = 1 \rightsquigarrow u = \ln(1) = 0, \quad x = \sqrt{e} \rightsquigarrow u = \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}\ln(e) = \frac{1}{2} \Big\} =$$

$$= \int_0^{1/2} \sin(\pi u)\,du = \left[-\cos(\pi u)\cdot \frac{1}{\pi} \right]_0^{1/2} = \left(-\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)\right)\frac{1}{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{\pi\sqrt{2}}.$$

$\square$

Ex: Beräkna $\displaystyle\int \tan x\,dx$

Lösning:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\overbrace{\sin x}^{=-(\cos x)'}}{\cos x}\,dx = \{ u = \cos x, \ du = -\sin x\,dx \} =$$

$$= \int -\frac{1}{u}\,du = -\int \frac{1}{u}\,dx = -\ln|u| + C =$$

$$= \ln\frac{1}{|u|} + C = \ln\frac{1}{|\cos x|} + C.$$

Glöm aldrig att $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$.

$\square$