

## Lösningförslag till tentamen i matematik TMV 135, 20110429, f.m.

1. (a)

$$\int_2^4 \frac{(x+1)^2}{x-1} dx = \int_2^4 \left( x + 3 + \frac{4}{x-1} \right) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + 3x + 4 \ln(x-1) \right]_2^4 = \dots = 4(3 + \ln 3).$$

(b)

$$\int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e = e \ln e - e - (1 \ln 1 - 1) = 1.$$

(c)

$$\int \sin \sqrt{x} dx \{x = t^2\} = 2 \int t \sin t dt = 2(-t \cos t + \int \cos t dt) = 2(\sin \sqrt{x} - \sqrt{x} \cos \sqrt{x}) + C.$$

2. (a)

$$y'(x) = 2x \cdot y(x) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = 2 \int x dx \Leftrightarrow \ln y = x^2 + C \Leftrightarrow y = C_1 e^{x^2}.$$

Villkoret  $y(0) = 1$  ger att  $C_1 = 1$ , så att  $y = e^{x^2}$ .

(b)

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2} = 2x \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = 2 \int x dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + C \Leftrightarrow y = \frac{1}{C - x^2}$$

Villkoret  $y(0) = 1$  ger att  $C = 1$ , så att  $y = \frac{1}{1 - x^2}$ .

(c) Karakteristisk ekvation till  $y''(t) - 4y(t) = 3e^{-t}$  är  $r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2$ , så att  $y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}$ .  $y_p = C e^{-t} \Rightarrow y_p' = C e^{-t}$ . Insatt i DE:n får vi

$$y_p'' - 4y_p = 3C e^{-t} = 3e^{-t} \Rightarrow C = 1.$$

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + e^{-t}.$$

3. Gränsvärdet är av typ  $\frac{0}{0}$ . Vi derivering av täljare och nämnare fås

$$\frac{1 - \cos x}{3x^2}, \frac{-\sin x}{6x}, \frac{\cos x}{6} \rightarrow \frac{1}{6}.$$

Svar:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$

(a)

$$f(x) = x^2 - x^6/6 + \dots, \quad g(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + \dots \Rightarrow f(x)g(x) = x^2 + x^3 + x^4/2 + x^5/6 - x^6/8 + \dots$$

Maclaurinpolynomet av  $f(x) \cdot g(x) =: h(x)$  av grad 6 är alltså  $x^2 + x^3 + x^4/2 + x^5/6 - x^6/8$ .

(b)  $h^{(6)}(0) = -6! \cdot \frac{1}{8} = -90$ .

4. Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna summan av de serier som är konvergenta.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

och alltså konvergent.

(b) Vi jämför  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  med

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = [\ln(\ln x)] = \infty,$$

och alltså divergent (Integralkriteriet).

(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (2/5)^n$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = f(x), \quad \|x\| < 1.$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = D \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (2/5)^n = \frac{25}{9}.$$

5. (a)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1} = - \int \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = [-\ln(1 + e^{-x})]_0^{\infty} = \ln 2$$

(b) Avgör om integralen  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1}$  är konvergent eller divergent.

$$0 \leq \frac{x dx}{e^x + 1} \leq x e^{-x} \text{ och } \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \dots = 1.$$

Alltså är integralen ovan konvergent.

6. Teori

6p

6p

7. Längden av kurvan  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (2 \cos t, \cos 2t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  ges av

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sqrt{(2 \sin t)^2 + (2 \sin 2t)^2} dt &= \int_0^\pi \sin t \sqrt{1 + (2 \cos t)^2} dt = \{2 \cos t = u\} = \\ \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1 + u^2} du &= \int_0^2 1 \cdot \sqrt{1 + u^2} du = \{\text{P.I.}\} = \\ \left[ u \sqrt{1 + u^2} \right]_0^2 - \int \frac{1 + u^2}{\sqrt{1 + u^2}} du + \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} &\Leftrightarrow \\ \int_0^2 1 \cdot \sqrt{1 + u^2} du &= \frac{1}{2} \left[ u \sqrt{1 + u^2} \right]_0^2 + \left[ \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right]_0^2 = \\ &= 2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

6p

## Trigonometriska formler

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \sin y = \sin(x + y) - \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

## En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

## Några Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är  $\xi$  ett tal mellan 0 och  $x$ .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$