Lösningsförslag till Tentamen i matematik TMV 135, 20111214, f.m.

1. Beräkna följande integraler

   (a)
   $$\int \frac{x-2}{x^2+2x}\,dx = \{\text{PBU}\} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}\right) dx = A\ln x + B\ln(x+2) + C\,.$$
   Konstanterna A och B:
   $$x-2 = A(x+2)+Bx \Leftrightarrow A=-1, \quad B=2 \Leftrightarrow \int \frac{x-2}{x^2+2x}\,dx = -\ln x + 2\ln(x+2) + C\,.$$

   (b)
   $$\int 4\arctan x\,dx = \{\text{P.I.}\} = 4x\arctan x - \int \frac{4x}{x^2+1}\,dx =$$
   $$= 4x\arctan x - 2\ln(x^2+1) + C \Longrightarrow$$
   $$\int_0^1 4\arctan x\,dx = \left[4x\arctan x - 2\ln(x^2+1)\right]_0^1 = 4\cdot\frac{\pi}{4} - 2\ln 2 = \pi - 2\ln 2\,.$$

   (c)
   $$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\cos x dx = \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} - \left(0 - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\,.$$
   9p

2. (Lös differentialekvationerna)

   (a)
   $$\frac{y'(x)}{y(x)^2} + x = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} + xdx = 0 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} + xdx = C \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow y = \frac{2}{x^2+C}$$
   Villkoret $y(0)=1$ ger att $1 = \frac{2}{0+C} \Leftrightarrow C = 2$, så att $y = \frac{2}{x^2+2}$.

   (b) Vi får $y_h = C\,e^{-3x}$ och $y_p = Ax+B$, som ger
   $$y_p' + 3y_p = A + 3(Ax+B) = 3x+1 \Leftrightarrow A = 1 \text{ och } B = 0$$
   Alltså är
   $$y = C\,e^{-3x} + x \text{ och } \quad y(0) = 1 \text{ ger } 1 = C\,.$$
   Svar: $y = x + e^{-3x}$.

   (c)
   $$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 2e^{-t}\,.$$
   $y_h = \{\text{kartk. ekv } r^2+4r+5=0 \Leftrightarrow r = -2\pm\sqrt{-1} = -2\pm i\} = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)\,.$
   $y_p = Ce^{-t}$. Insättning i DE:n:
   $$Ce^{-t}(1-4+5) = Ce^{-t}\cdot 2 = 2e^{-t} \Rightarrow C = 1$$
   Svar: $y = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t) + e^{-t}$.
   8p

3. (Beräkna gränsvärdet)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4}\,.$$
   $$\frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \{\text{Maclaurinutv. av täljaren}\} = \frac{1-(1-x^4/2!+\ldots)}{x^4} = \frac{1/2+\ldots}{1} \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ då } x \to 0\,.$$
   4p

4. (a) Maclaurinpolynomet av
   $$h(x) := e^{-x^2}\ln(2x+1)(1-x^2+x^4/2!+\ldots)(2x-(2x)^2/2+(2x)^3/3-\ldots) = 2x-2x^2+\frac{2x^3}{3}+\ldots$$
   av grad 3 är alltså $2x - 2x^2 + \frac{2x^3}{3}$.

   (b) $h^{(3)}(0)$ ges av
   $$\frac{2}{3} = f^{(3)}(0)\cdot\frac{1}{3!} \Leftrightarrow f^{(3)}(0) = \frac{6\cdot 2}{3} = 4\,.$$
   6p

5. (Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna summan av de serier som är konvergenta.)

   (a) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{4}{k^2-2k}$ konvergent ty vi kan jämföra $a_k = \frac{4}{k^2-2k}$ med $b_k = \frac{1}{k^2}$.
   $$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} 4\cdot\frac{1-2/k}{1} = \frac{4}{1} < \infty\,,$$
   så att eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, så är denna serie konvergent. Den kan räknas ut m.h.a. PBU.
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2-2k} = 2\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots\right) = 2\cdot\frac{3}{2} = 3\,.$$

(b) Konvergent geometrisk serie med $x = e^{-1/2} < 1$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} = e^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j/2} = e^{-1/2} \cdot \frac{1}{1-e^{-1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}-1} \,.$$

(c)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n} \cdot (n-1)}$$

Termerna

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n} \cdot (n-1)} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n} \cdot n} = n^{-1/3-1+1/2=-5/6 \geq -1} = n^{-5/6} = .b_n$$

och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är divergent och alltså är serien divergent.

9p

Givet funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Området som begränsas av $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ och $x = 1$ roterar kring $x-$axeln.

6. (a) Volymen av rotationskroppen som uppstår av rotationen är

$$V = \pi \in_0^1 f(x)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \,.$$

(b) P.s.s.

$$V = \int_0^1 2\pi x |f(x)| dx = 2\pi \int_0^1 x^{3/2} dx = 2\pi \cdot \frac{2}{5} \left[x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{5} \,.$$

6p

För vilka α är integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

konvergent? Uträkningar fordras.

7. Givet integralen $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^{\alpha}+1}}$.

(a)

$$0 < \frac{1}{x\sqrt{x^{\alpha}+1}} \leq \frac{1}{x\sqrt{x^{\alpha}}} = \frac{1}{x^{1+\alpha/2}}$$

som ger en konvergent integral, om $\alpha > 0$. (Om $\alpha = 0$ får vi integranden $\frac{1}{x\sqrt{x^0+1}} = \frac{1}{x\sqrt{2}}$, som ger en divergent integral. Om $\alpha < 0$ får vi en integrand $\frac{1}{x\sqrt{x^{\alpha}+1}} \geq= \frac{1}{x\sqrt{2}}$ och alltså en divergent integral.)

(b) Vi antar alltså att $\alpha > 0$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^{\alpha}+1}} = \left\{ \begin{array}{ccl} t & = & \sqrt{x^{\alpha}+1} \Leftrightarrow \\ x & = & \left(t^2-1\right)^{1/\alpha} \Rightarrow \\ dx & = & \frac{1}{\alpha}\left(t^2-1\right)^{1/\alpha-1} 2tdt \\ x=1 & \Rightarrow & t=\sqrt{2} \\ x=\infty & \Rightarrow & t=\infty \end{array} \right\} = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{\frac{1}{\alpha}\left(t^2-1\right)^{1/\alpha-1} 2tdt}{(t^2-1)^{1/\alpha} \cdot t} =$$

$$= \frac{2}{\alpha} \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{\alpha} \left[\ln(t-1) - \ln(t+1)\right]_{\sqrt{2}}^{\infty} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\alpha} \left[\ln\left(\frac{1-1/b}{1+1/b}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{2}{\alpha} \ln\left(\sqrt{2}+1\right). \text{ (svar)}$$

6p